# Городские кружки в ЦПМ
# Летние сборы, июнь 2024, 8 класс
# Материалы занятий

## Содержание

# Часть I

# Группа 8–1

# 1. Алгебра

# Неравенство о средних

**Определение.** Выражения

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n},\ \sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n},\ \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}},\ \sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{n}}$$

называются соответственно *средним арифметическим*, *средним геометрическим*, *средним гармоническим* и *средним квадратическим* набора неотрицательных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Утверждается, что выполнено следующее неравенство:

$$\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{n}} \geqslant \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n} \geqslant \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}},$$

причём равенство достигается тогда и только тогда, когда все переменные равны между собой.

В дальнейшем предполагается, что фигурирующие в задаче переменные вещественные и положительные, если не обговорено иное.

1. **(а)** Докажите неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим для $n = 2^k$ переменных индукцией по $k$.
   **(б)** Из неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим для $n$ выведите его для $n-1$ переменных.
   **(в)** Докажите неравенство между средним геометрическим и средним гармоническим для $n$ переменных.
   **(г)** Докажите неравенство между средним квадратическим и средним арифметическим для $n$ переменных.

2. **(а)** Докажите, что $a^5+b^5+c^5 \geqslant abc(a^2+b^2+c^2)$,
   **(б)** Найдите наименьшее возможное $M$, такое что

$$M(a^5+b^5+c^5) \geqslant a^4b+b^4a+c^4a+a^4c+b^4c+c^4b$$

   для любых $a, b, c > 0$,
   **(в)** Докажите, что $a^6b+b^6a \geqslant a^4b^3+a^3b^4$

**3.** Докажите неравенство $\sqrt{-3a^2+24a-19}+\sqrt{a^2+13}+\sqrt{2a^2-24a+153} < 21$.

**4.** Докажите, что $2\sqrt{a}+3\sqrt[3]{b} \geqslant 5\sqrt[5]{ab}$.

**5.** Найдите минимальное значение выражения $\frac{(x+1)(x+2)(x+5)}{x}$,

**6.** Даны вещественные $x_0 \geqslant x_1 \geqslant \dots \geqslant x_n$. Докажите, что

$$x_0 + \frac{1}{x_0 - x_1} + \frac{1}{x_1 - x_2} + \dots + \frac{1}{x_{n-1} - x_n} \geqslant x_n + 2n.$$

**7.** Произведение чисел $a, b, c$ равно 1. Докажите, что

**(а)** $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant a + b + c$,

**(б)** $(2+a)(2+b)(2+c) \geqslant 27$.

**8.** Докажите, что для любого натурального $n$ верно $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$.

# Неравенство о средних. Добавка

**1.** Для натуральных чисел $n$ и $m$ докажите неравенство

$$2\sqrt[n+m]{n^{2m}m^{2n}} \leqslant n^2 + m^2.$$

**2.** Числа $a_1, a_2, \dots, a_n$ удовлетворяют соотношению

$$\frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_2} + \dots + \frac{1}{1+a_n} = 1.$$

Докажите, что $a_1 a_2 \dots a_n \geqslant (n-1)^n$.

**3.** Числа $a_i$, $i = 0 \dots 2n-1$, $n \geqslant 4$ удовлетворяют соотношениям

$$a_{2k} = a_{2k-1} + a_{2k+1}, \quad a_{2k+1} = \frac{1}{a_{2k}} + \frac{1}{a_{2k+2}}$$

для $k = 0 \dots n$ (индексы в этих соотношениях берутся по модулю $2n$). Докажите, что все $a_i$ с чётными индексами $i$ равны между собой.

# Двигаем вдоль прямой

*Основная мысль.* Линейная функция $y = kx + b$ заданная на отрезке $[a, b]$ достигает своего максимума на концах отрезка.

1. Докажите, что вещественные числа $0 \leqslant a_1, a_2, \dots a_n \leqslant 1$ удовлетворяют неравенству $a_1 + a_2 + \dots + a_n - 2a_1a_2 \dots a_n \leqslant n - 1$.

2. Найдите максимальное значение суммы $a_1(1-a_2)+a_2(1-a_3)+\dots+a_n(1-a_1)$, если $\frac{1}{2} \leqslant a_1, a_2, \dots a_n \leqslant 1$

3. Для положительных вещественных чисел $x, y, z \geqslant 1$ докажите, что $xy + xz + yz \leqslant 2xyz + 1$.

4. Докажите, что площадь треугольника, лежащего внутри единичного квадрата, не превосходит $1/2$.

5. Для неотрицательных чисел $x, y, z$ докажите неравенство
$$\min\{(x-y)^2, (y-z)^2, (x-z)^2\} \leqslant \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2}.$$
*Подсказка:* докажите для начала, что одно из чисел можно сделать равным нулю.

6. Для положительных чисел $a$, $b$ и $c$ докажите, что
$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc \geqslant 2(a-b)(b-c).$$

7. На плоскости с введённой декартовой системой координат $Oxy$ нарисован многоугольник. Рассматривается некоторое выражение вида $z = ax+by$, где $a, b$ — константы, а точка $(x, y)$ лежит внутри многоугольника (возможно на границе). Докажите, что максимум этого выражения достигается в вершинах многоугольника.

8. Михаил пошёл на рынок покупать раков. У местного продавца можно купить либо больших раков по 5 рублей, либо маленьких по 3. Михаил хочет купить такое количество раков, что соблюдаются следующие требования:
   - удвоенное количество больших раков плюс количество маленьких раков не превышает 36,

- ушестеренное количество больших раков плюс упятеренное количество маленьких раков не превышает 120,
- удевятеренное количество больших раков плюс упятеренное количество маленьких раков не превышает 150.

Как ему потратить как можно больше денег?

# Метод Штурма

**1.** Что происходит с выражениями $a+b$, $ab$, $a^n+b^n$, $a^{-1}+b^{-1}$, где $n$ — натуральное, при сближении двух положительных чисел $a$ и $b$ **(а)** при фиксированной сумме $a+b$, **(б)** при фиксированном произведении $ab$?

**2.** С помощью метода Штурма докажите неравенство о средних между
**(а)** средним квадратическим и средним арифметическим,
**(б)** средним геометрическим и средним гармоническим.

**3.** Пусть $g$ среднее геометрическое чисел положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Докажите неравенство

$$(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n) \geqslant (1+g)^n.$$

**4.** Сумма неотрицательных чисел $a$, $b$, $c$, $d$ равна 4. Докажите неравенство

$$(a^2+b^2)cd+(c^2+d^2)ab \leqslant 4.$$

**5.** Даны положительные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ с суммой равной 1. Докажите, что
**(а)** $(1-a_1)(1-a_2)\ldots(1-a_n) \geqslant a_1a_2\ldots a_n(n-1)^n$,
**(б)** $(1+a_1)(2+a_2)\ldots(n+a_n) \leqslant 2n!$.

**6.** Положительные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ таковы, что $a_i < 1$ при $i = 1, \ldots, n$. Докажите, что

$$\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{1+a_2}+\ldots+\frac{1}{1+a_n} \leqslant \frac{n}{1+\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}}.$$

Что произойдёт с неравенством, если заменить требование $a_i < 1$ на $a_i > 1$?

**7.** Докажите, что $0 \leqslant xy+xz+yz-2xyz \leqslant \frac{7}{27}$ при $x, y, z \geqslant 0$ и $x+y+z=1$.

**8.** Для неотрицательных чисел $a, b, c$ с суммой равной 3 докажите, что

$$a^2b+b^2c+c^2a \leqslant 4.$$

**9.** Произведение положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ равно 1. Докажите неравенство

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(n-1)+x_k} \leqslant 1.$$

**10.** Вещественные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ при $n > 3$ таковы, что

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geqslant n, \quad a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 \geqslant n^2.$$

Докажите, что $\max\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \geqslant 2$.

# Неравенство Коши-Буняковского-Шварца

**Неравенство КБШ.** Для любых вещественных чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ и $b_1, b_2, \dots, b_n$ выполнено неравенство

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geqslant (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2$$

**1.** Докажите неравенство КБШ.

**2.** **Лемма Титу (КБШ для дробей).** Для вещественных чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ и вещественных положительных чисел $b_1, b_2, \dots, b_n$ докажите, что

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \dots + \frac{a_n^2}{b_n} \geqslant \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \dots + b_n}.$$

**3.** Для положительных вещественных чисел $a, b, c$ докажите, что

**(а)** $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} \geqslant \frac{9}{2(a+b+c)}$,

**(б)** $\frac{a^2(b+c)}{bc} + \frac{b^2(a+c)}{ac} + \frac{c^2(a+b)}{ab} \geqslant 2(a+b+c)$.

**(в)** $\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2+2c^2} + \frac{(b+c)^2}{b^2+c^2+2a^2} + \frac{(c+a)^2}{c^2+a^2+2b^2} \leqslant 3$,

**4.** При каких значениях переменных $(x, y, z)$ достигается минимум выражения $x^2 + y^2 + z^2$, если известно, что $3x - 4y + 5z = 5$?

**5.** Для положительных чисел $a$ и $b$ докажите, что $a^3 + b^3 > a^2 + b^2$, если известно, что $a^2 + b^2 > a + b$.

**6.** **Неравенство Несбитта.** Для положительных вещественных чисел $a, b, c$ докажите, что $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}$.

**7.** Докажите, что $\sqrt{x + xyz} \geqslant \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1}$.

**8.** Положительные вещественные числа $a_1, a_2, \dots, a_n$ удовлетворяют неравенству

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}\right) \leqslant (n + \frac{1}{2})^2.$$

Докажите, что $\max\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \leqslant 4\min\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$.

**9.** Для вещественных чисел $x, y, z$ докажите, что

$$(x^2 + 3)(y^2 + 3)(z^2 + 3) \geqslant (xyz + x + y + z + 4)^2.$$

# Неравенства

Везде в задачах предполагается, что числа вещественные и положительные, если отдельно не обговорено иное.

**1.** Для неотрицательного числа $x$ докажите, что

$$1 + x^{n+1} \geqslant \frac{(2x)^n}{(1+x)^{n-1}}.$$

**2.** Известно, что $a + b + c = 3$. Докажите, что

$$\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \geqslant \frac{3}{2}.$$

**3.** Дан треугольник со сторонами $a, b, c$. Докажите, что

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant 8(a+b-c)(b+c-a)(a+c-b).$$

**4.** Для чисел $a \geqslant b \geqslant c \geqslant d$ докажите неравенство

$$\sqrt[4]{abcd} \leqslant \sqrt{\sqrt{abcd} + \frac{3}{16}\left(c-d\right)^2} \leqslant \frac{a+b+c+d}{4}.$$

**5.** Числа $a, b, c, d$ удовлетворяют неравенству $2(a+b+c+d) \geqslant abcd$. Докажите, что $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geqslant abcd$

**6.** Докажите следующее неравенство:

$$\frac{a^3+3b^3}{5a+b} + \frac{b^3+3c^3}{5b+c} + \frac{c^3+3a^3}{5c+a} \geqslant \frac{2}{3}(a^2+b^2+c^2).$$

**7.** Произведение чисел $a, b, c$ равно 1. Докажите, что

$$\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right)\left(b - 1 + \frac{1}{c}\right)\left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \leqslant 1.$$

**8.** Произведение чисел $a, b, c$ равно 1. Докажите, что $\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geqslant \frac{3}{2}$.

**9.** Известно, что $a + b + c + d = 3$. Докажите, что

$$\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} + \frac{1}{d^3} \leqslant \frac{1}{a^3b^3c^3d^3}$$

**10.** Докажите следующее неравенство:

$$(x^5 - x^2 + 3)(y^5 - y^2 + 3)(z^5 - z^2 + 3) \geqslant (x + y + z)^3.$$

# 2. Геометрия

# Движения

1. В треугольнике $ABC$ проведена биссектриса $AL$. Серединный перпендикуляр к отрезку $AL$ пересекает $(ABC)$ в точках $P$ и $Q$. Докажите, что $(PQL)$ касается отрезка $BC$.

2. На диагонали $AC$ квадрата $ABCD$ взята точка $P$. Высоты треугольника $CPD$ пересекаются в точке $H$. Точки $M$ и $N$ — середины отрезков $AD$ и $CD$ соответственно. Докажите, что прямые $PM$ и $NH$ перпендикулярны.

3. На стороне $BC$ прямоугольника $ABCD$ вовне него построен треугольник $PBC$. Докажите, что перпендикуляры, опущенные из точки $A$ на $CP$, из точки $D$ на $BP$ и из точки $P$ на $AD$, пересекаются в одной точке.

4. Дан параллелограмм $ABCD$, отличный от ромба. На сторонах $BC$ и $CD$ выбираются точки $P$ и $Q$ такие, что $CP = CQ$. Докажите, что окружности $(APQ)$ проходят через фиксированную точку, отличную от $A$.

5. В треугольник вписана окружность и к ней проведены касательные, параллельные сторонам треугольника и отличные от сторон. Докажите, что противолежащие стороны образовавшегося шестиугольника попарно равны, а три большие диагонали пересекаются в одной точке.

6. Точка $M$ — середина основания $BC$ равнобедренного треугольника $ABC$. На продолжении отрезков $AC$ и $BC$ выбраны точки $D$ и $E$ соответственно так, что $CM = CD$ и $AC = CE$. Докажите, что окружности $(ABE)$ и $(CDM)$ касаются.

7. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность $\omega$. Точки $E$ и $F$ симметричны точке $A$ относительно середин сторон $BC$ и $CD$. Окружность $(CEF)$ вторично пересекает $\omega$ в точке $X$. Докажите, что $AX$ — диаметр $\omega$.

8. Даны два одинаково ориентированных квадрата $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ (то есть при обходе по часовой стрелке вершины идут в соответствующем порядке). Докажите, что середины отрезков $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$, $DD_1$ образуют квадрат.

9. Дана равнобокая трапеция $ABCD$, в которой $AB \parallel CD$. Пусть $E$ — середина $AC$. Касательная в точке $A$ к окружности $(ABE)$ и касательная в точке $D$ к окружности $(CDE)$ пересекаются в точке $P$. Докажите, что прямая $PE$ касается окружности $(CDE)$.

# Движения. Добавка

1. В остроугольном треугольнике $ABC$ проведена биссектриса $AL$. На продолжении отрезка $LA$ за точку $A$ выбрана точка $K$ так, что $AK = AL$. Окружности $(BLK)$ и $(CLK)$ пересекают отрезки $AC$ и $AB$ в точках $P$ и $Q$ соответственно. Докажите, что прямые $PQ$ и $BC$ параллельны.

2. В неравнобедренном треугольнике $ABC$ провели биссектрису внутреннего угла $AA_1$ и биссектрису внешнего угла $AA_2$. Из точек $A_1$ и $A_2$ провели касательные к окружности $\omega$, вписанной в треугольник $ABC$, отличные от прямой $BC$. Они касаются $\omega$ в точках $D_1$ и $D_2$ соответственно. Докажите, что точки $A$, $D_1$ и $D_2$ лежат на одной прямой.

3. Точка $I$ — центр вписанной окружности треугольника $ABC$. Вписанная окружность касается стороны $AB$ в точке $D$. Вневписанная окружность касается стороны $BC$ в точке $E$. Точка $F$ такова, что $CFDI$ — параллелограмм. Докажите, что $EF \parallel BI$.

# Композиция движений

*Скользящая симметрия* — это композиция осевой симметрии относительно прямой $\ell$ и параллельного переноса на вектор, параллельный $\ell$.

**Пример.** Если прямые $\ell_1$ и $\ell_2$ пересекаются под углом $\varphi$, то композиция $S_{\ell_2} \circ S_{\ell_1}$ является поворотом на угол $2\varphi$ относительно точки пересечения прямых.

1. Прямые $\ell_1$ и $\ell_2$ параллельны. Чему равна композиция $S_{\ell_2} \circ S_{\ell_1}$? А $S_{\ell_1} \circ S_{\ell_2}$?

2. **(а)** Чему равна композиция $T_{\vec{v}} \circ S_\ell$, если $\vec{v}$ перпендикулярен $\ell$?
**(б)** Чему равна композиция $T_{\vec{v}} \circ S_\ell$, если $\vec{v}$ не параллелен $\ell$?

3. **(а)** Верно ли, что любой поворот и любой параллельный перенос можно представить как композицию двух осевых симметрий? Единственно ли такое представление?
**(б)** Посмотрите на предыдущий пункт и найдите композиции $T_{\vec{v}} \circ R_O^\varphi$ и $R_O^\varphi \circ T_{\vec{v}}$.

4. Даны пересекающиеся прямые $\ell$ и $m$. Найдите все движения $F$ такие, что $S_\ell \circ F = S_m$.

5. **(а)** Даны два треугольника $ABC$ и $A_1B_1C_1$. Докажите, что существует не более одного движения, которое переводит один треугольник в другой (соответственные вершины — в соответственные).
**(б)** Докажите, что любое движение можно представить как композицию не более чем трёх симметрий.
**(в)** **Теорема Шаля.** Докажите, что любое движение плоскости — это либо поворот, либо параллельный перенос, либо симметрия, либо скользящая симметрия.

Треугольники $ABC$ и $A_1B_1C_1$ называются *одинаково ориентированными*, если обходы вершин $A \to B \to C \to A$ и $A_1 \to B_1 \to C_1 \to A_1$ происходят либо оба по часовой стрелке, либо оба против часовой стрелки. Важное наблюдение: скользящая симметрия меняет ориентацию, а поворот и параллельный перенос — нет.

6. Треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ равны и противоположно ориентированы. Докажите, что середины отрезков $A_1A_2$, $B_1B_2$ и $C_1C_2$ лежат на одной прямой.

7. В остроугольном треугольнике $ABC$ точка $O$ — центр его описанной окружности, $H$ — основание высоты из вершины $A$. Пусть $P$ — произвольная точка

плоскости. Точка $Q$ симметрична $P$ относительно $AB$, точка $R$ симметрична $Q$ относительно $AH$, точка $S$ симметрична $R$ относительно $AC$. Докажите, что $OP = OS$.

**8.** Каждый из узлов бесконечного листа клетчатой бумаги раскрашен в один из двух цветов: чёрный или белый. Докажите, что существует бесконечное одноцветное множество узлов, имеющее центр симметрии.

# Добавка к добавке

**1.** На плоскости расположен центрально-симметричный многоугольник $M$ площади $S$ и два многоугольника, полученные из него параллельным переносом. Оказалось, что ни одна точка плоскости не покрыта всеми тремя многоугольниками. Докажите, что суммарная площадь, покрытая многоугольниками, не меньше $2S$.

**2.** В выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$ противоположные стороны равны и

$$\angle A - \angle D = \angle C - \angle F = \angle E - \angle B.$$

Докажите, что прямые $AD$, $BE$ и $CF$ пересекаются в одной точке.

# Композиция поворотов

**Факт.** Пусть $A$ и $B$ — две различные точки плоскости. Тогда

$$R_B^{\beta} \circ R_A^{\alpha} = \begin{cases} R_C^{\alpha+\beta}, & \text{если } \alpha+\beta \not\equiv 0 \pmod{360}, \\ T_{\vec{v}}, & \text{если } \alpha+\beta \equiv 0 \pmod{360}, \end{cases}$$

для некоторой точки $C$ и некоторого вектора $\vec{v}$.

**Теорема Наполеона.** На сторонах треугольника вовне построены правильные треугольники. Тогда их центры образуют правильный треугольник.

1. На сторонах треугольника $ABC$ вовне построены равносторонние треугольники $ABC_1$ и $ACB_1$, а внутрь — равносторонний треугольник $BCA_1$. Точка $M$ — центр треугольника $BCA_1$. Докажите, что треугольник $B_1C_1M$ — равнобедренный с углом $120°$.

2. На сторонах $AB$ и $AC$ треугольника $ABC$ во внешнюю сторону построены квадраты $ABLK$ и $ACMN$ соответственно. Точка $D$ — середина отрезка $LM$. Найдите углы треугольника $BCD$.

3. Круг поделили хордой $AB$ на два круговых сегмента и один из них повернули на некоторый угол вокруг точки $A$. Пусть при этом повороте точка $B$ перешла в точку $C$. Докажите, что отрезки, соединяющие середины дуг сегментов с серединой отрезка $BC$, перпендикулярны друг другу.

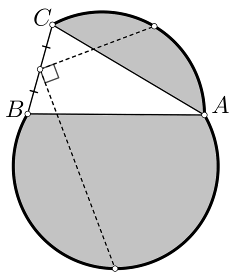



Рис. 1: К задаче 5

4. Вписанная в треугольник $ABC$ окружность касается стороны $BC$ в точке $A_1$. На биссектрисах углов $B$ и $C$ выбраны точки $X$ и $Y$ соответственно так, что $\angle XA_1Y = 90°$. Докажите, что $\angle XAY = \frac{\angle A}{2}$.

5. На сторонах выпуклого четырёхугольника внешним образом построены квадраты. Докажите, что отрезки, соединяющие центры противоположных квадратов, равны и перпендикулярны.

**6.** На сторонах треугольника $ABC$ вне него построены треугольники $ABP$ и $ACQ$ такие, что $AP = AB$, $AC = AQ$ и $\angle BAP = \angle QAC$. Отрезки $PC$ и $QB$ пересекаются в точке $R$. Точка $S$ — центр $(BRC)$. Докажите, что $AS \perp PQ$.

**7.** (*Всерос-2021, 11-4*) В треугольнике $ABC$ биссектрисы $AA_1$ и $CC_1$ пересекаются в точке $I$. Прямая, проходящая через точку $B$ параллельно $AC$ пересекает лучи $AA_1$ и $CC_1$ в точках $A_2$ и $C_2$ соответственно. Точка $O_a$ — центр описанной окружности треугольника $AC_1C_2$, точка $O_c$ — центр описанной окружности треугольника $CA_1A_2$. Докажите, что $\angle O_aBO_c = \angle AIC$.

# Гомотетия

1. В трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) диагонали пересекаются в точке $O$. Перпендикуляры, проведенные из точек $B$ и $C$ соответственно на $AC$ и $BD$, пересекаются в точке $M$, а перпендикуляры из $A$ и $D$ соответственно на $BD$ и $AC$ — в точке $K$. Докажите, что точки $M, K$ и $O$ лежат на одной прямой.

2. **Лемма Архимеда.** Пусть в окружности $\omega$ проведена хорда $AB$, и ещё одна окружность касается $\omega$ в точке $C$ и отрезка $AB$ в точке $D$. Докажите, что прямая $CD$ проходит через середину дуги $AB$, не содержащей $C$.

3. Вписанная окружность треугольника $ABC$ касается его стороны $BC$ в точке $D$. Пусть $DT$ — диаметр вписанной окружности. Прямая $AT$ пересекает сторону $BC$ в точке $X$. Докажите, что $BD = CX$.

4. Дана трапеция $ABCD$ ($BC \parallel AD$ и $AD > BC$), в которой на основаниях выбраны точки $K$ и $L$ так, что прямые $AB, CD$ и $KL$ пересекаются в одной точке. На отрезке $KL$ выбраны такие точки $P$ и $Q$, что $\angle AQD = \angle ABC$ и $\angle BPC = \angle BAD$. Докажите, что четырёхугольник $ABPQ$ вписанный.

5. Дан треугольник $ABC$, в котором $AB \neq AC$. Точка $E$ такова, что $AE = BE$ и $BE \perp BC$. Точка $F$ такова, что $AF = CF$ и $CF \perp BC$. Пусть $D$ — точка пересечения касательной к описанной окружности $ABC$ в точке $A$ и прямой $BC$. Докажите, что точки $D, E, F$ лежат на одной прямой.

6. Три равные окружности $\omega_1, \omega_2$ и $\omega_3$ лежат внутри и касаются сторон треугольника $ABC$: $\omega_1$ сторон $AC$ и $AB$; $\omega_2$ сторон $AB$ и $BC$; $\omega_3$ сторон $AC$ и $BC$. Оказалось, что они еще и имеют общую точку $S$. Докажите, что $S$ лежит на прямой, проходящей через центры вписанной и описанной окружностей треугольника $ABC$.

7. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Прямая $\ell_1$ проходит через точку $A$ параллельно прямой $CD$ и пересекает отрезок $BD$ в точке $E$. Прямая $\ell_2$ проходит через точку $D$ параллельно прямой $AB$ и пересекает отрезок $AC$ в точке $F$. Докажите, что $EF \parallel BC$.

8. Окружность $\omega$ касается сторон $AB$ и $AC$ треугольника $ABC$. Окружность $\Omega$ касается стороны $AC$ и продолжения стороны $AB$ за точку $B$, а также касается $\omega$ в точке $L$, лежащей на стороне $BC$. Прямая $AL$ вторично пересекает $\omega$ и $\Omega$ в точках $K$ и $M$ соответственно. Оказалось, что $KB \parallel CM$. Докажите, что

треугольник $LCM$ равнобедренный.

**9.** Пусть $CE$ — биссектриса в остроугольном треугольнике $ABC$. На внешней биссектрисе угла $ACB$ отмечена точка $D$, а на стороне $BC$ — точка $F$, причем $\angle BAD = 90^\circ = \angle DEF$. Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника $CEF$, лежит на прямой $BD$.

# Гомотетия. Добавка

1. В треугольнике $ABC$ на сторонах $BC, AC, AB$ отметили точки $A_1, B_1, C_1$ – точки касания соответствующих вневписанных окружностей. Докажите, что прямые $AA_1, BB_1, CC_1$ пересекаются в одной точке $N$ (*точка Нагеля*), которая лежит на прямой $MI$ (*прямая Нагеля*), где $M$ – точка пересечения медиан, а $I$ – центр вписанной окружности треугольника $ABC$.

2. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Прямая, проходящая через точку $D$ параллельно прямой $AC$, пересекает лучи $BA$ и $BC$ в точках $A_0$ и $C_0$ соответственно. Луч $CD$ вторично пересекает описанную окружность треугольника $A_0CC_0$ в точке $C_1$. Луч $AD$ вторично пересекает описанную окружность треугольника $A_0AC_0$ в точке $A_1$. Докажите, что прямая $A_1C_1$ касается окружности, описанной около треугольника $A_0BC_0$.

3. На сторонах $AB$ и $AC$ треугольника $ABC$ отметили соответственно точки $D$ и $E$ так, что $DB = BC = CE$. Прямые $CD$ и $BE$ пересекаются в точке $F$. Докажите, что точка пересечения биссектрис треугольника $ABC$, ортоцентр треугольника $DEF$ и середина дуги $BAC$ описанной окружности треугольника $ABC$ лежат на одной прямой.

# Ещё гомотетия

1. Соответствующие стороны неравных треугольников $ABC$ и $A_1B_1C_1$ попарно параллельны. Докажите, что существует гомотетия, которая переводит один треугольник в другой.

2. Вписанная окружность треугольника $ABC$ касается сторон $AB, AC, BC$ в точках $C', B', A'$ соответственно. Точки $A_1, B_1, C_1$ — середины дуг $BC, AC, AB$ описанной окружности треугольника $ABC$. Докажите, что прямые $A_1A'$, $B_1B'$, $C_1C'$ пересекаются в одной точке.

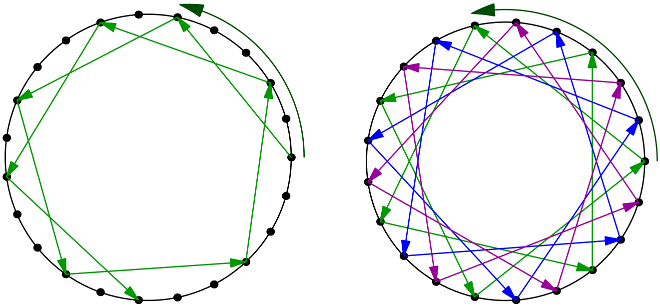
3. **(а)** Вписанная окружность треугольника $ABC$ касается сторон $AC$ и $AB$ в точках $B_0$ и $C_0$ соответственно. Биссектрисы углов $B$ и $C$ треугольника $ABC$ пересекают серединный перпендикуляр к биссектрисе $AL$ в точках $Q$ и $P$ соответственно. Докажите, что прямые $PC_0$ и $QB_0$ пересекаются на прямой $BC$.
**(б)** В треугольнике  провели биссектрису $AL$. Точки $O_1$ и $O_2$ — центры описанных окружностей треугольников $ABL$ и $ACL$ соответственно. Точки $B_1$ и $C_1$ — проекции вершин $C$ и $B$ на биссектрисы углов $B$ и $C$ соответственно. Докажите, что прямые $O_1C_1$ и $O_2B_1$ пересекаются на прямой $BC$.
**(в)** Докажите, что точки пересечения из предыдущих пунктов совпадают.

4. **(а)** Проведём через основание биссектрисы угла $A$ неравнобедренного треугольника $ABC$ отличную от стороны $BC$ касательную к вписанной в треугольник окружности. Точку её касания с окружностью обозначим через $K_a$. Аналогично построим точки $K_b$ и $K_c$. Докажите, что три прямые, соединяющие точки $K_a$, $K_b$ и $K_c$ с серединами сторон $BC$, $CA$ и $AB$ соответственно, пересекаются в одной точке.
**(б)** Выведите из этого, что вписанная окружность касается окружности Эйлера.

# 3. Комбинаторика

# Прыжки по кругу

**1.** Даны натуральные числа $n$ и $k$, $n > k$. На окружности отмечено $n$ точек, в одной из которых изначально сидит кузнечик. Этот кузнечик может прыгать вдоль окружности против часовой стрелки по отмеченным точкам, каждый раз перепрыгивая через $k - 1$ точку.



**(а)** Докажите, что кузнечик побывает во всех отмеченных точках тогда и только тогда, когда НОД$(n, k) = 1$.

**(б)** Назовём *орбитой* точки $A$ множество точек, достижимых из $A$. Докажите, что все отмеченные точки разбиваются на НОД$(n, k)$ попарно непересекающихся одинаковых орбит.

**2.** По кругу лежат 99 карточек с числами от 1 до 99 в порядке возрастания по часовой стрелке. Одна операция меняет местами две карточки, между которыми ровно **(а)** 29; **(б)** 30 других карточек. Можно ли такими операциями упорядочить карточки в порядке возрастания против часовой стрелки?

**3.** На столе лежат два равных картонных правильных 101-угольника. Вершины одного из них пронумерованы подряд числами от 0 до 100 в порядке обхода против часовой стрелки.

**(а)** Докажите, что вершины второго 101-угольника можно так занумеровать числами от 0 до 100, что при любом наложении (без переворота) первого на второй как минимум в одной вершине номера совпадут.

**(б)** Докажите, что число таких нумераций вершин второго многоугольника не меньше 99. (Нумерации, совмещающиеся поворотом, считаем одинаковыми.)

**(в)** Та же задача для двух 111-угольников. Можно ли вершины второго 111-угольника занумеровать так, что при любом наложении (с переворотом **или без**) первого на второй как минимум в одной вершине номера совпадут?

**4.** Окружность длины $n$ разделена точками на $n$ равных дуг. Кузнечик начинает прыгать с некоторой точки и делает $n-1$ прыжков: на 1, на 2, ..., на $n-1$ по часовой стрелке **в некотором** порядке. При каких $n$ кузнечик сможет посетить все отмеченные точки?

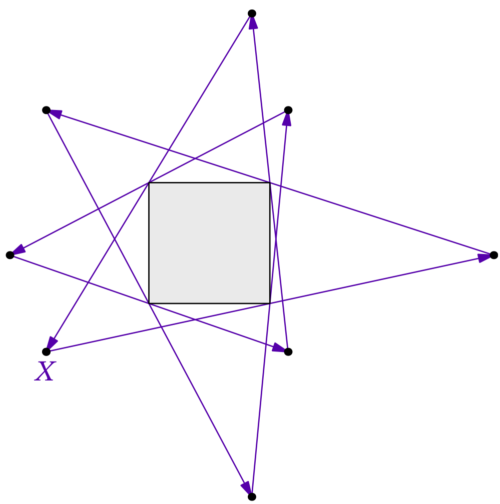
**5.** Окружность длины $n$ разделена точками на $n$ равных дуг. Кузнечик начинает прыгать с некоторой точки и делает $n-1$ прыжков: на 1, на 2, ..., на $n-1$ по часовой стрелке **в указанном** порядке. При каких $n$ кузнечик побывает во всех отмеченных точках?

**6.** Даны натуральные числа $n$ и $k$, $k < n$. В фирме работают $n$ сотрудников, зарплата каждого из которых выражается натуральным числом рублей. Каждый месяц начальник поднимает зарплату на 1 рубль некоторым $k$ сотрудникам. При каких $n$ и $k$ он сможет сделать все зарплаты равными вне зависимости от начального распределения зарплат?

**7.** На плоскости нарисован квадрат площади 1. Для каждой точки $X$ вне квадрата определим операцию *отражения относительно квадрата* следующим образом. Рассмотрим наименьший угол с вершиной $X$, содержащий квадрат, и отразим $X$ относительно наиболее удаленной от $X$ общей точки квадрата и правого луча рассматриваемого угла (эта система называется *внешним бильярдом*). *Периодом* точки назовем наименьшее число отражений относительно квадрата, необходимое для того, чтобы точка вернулась на свое место. Обозначим через $S(n)$ площадь множества точек периода $n$.

**(а)** Докажите, что $S(4) \geqslant 4$ и $S(8) \geqslant 8$.

**(б)** Для каждого натурального $n$ найдите $S(n)$.



# Прыжки по кругу, добавка

**8.** На окружности длины 999 отмечены 999 точек, делящих ее на равные дуги. В каждой отмеченной точке стоит фишка. Назовем *расстоянием* между двумя точками длину меньшей дуги между этими точками. При каком наибольшем $n$ можно переставить фишки так, чтобы в каждой отмеченной точке было по фишке, а расстояние между любыми двумя фишками, изначально удаленными не более, чем на $n$, увеличилось?

**9.** Петя как-то занумеровал вершины правильного $n$-угольника числами от 1 до $n$. Вася первым ходом ставит фишку в какую-то из вершин. Каждым последующим ходом он может передвинуть фишку из вершины $A$ в вершину $B$, если между ними не больше 9 других вершин и число в $B$ больше числа в $A$. Какое наибольшее количество вершин гарантированно сможет посетить Вася, как бы Петя ни нумеровал вершины, если $n = 1001$?

# Алгебраические конструкции

1. **(а)** Докажите, что в полном графе на 7 вершинах можно выделить несколько троек вершин так, что каждое ребро попадёт ровно в одну тройку.
**(б)** Докажите, что в полном графе на 13 вершинах можно выбрать несколько четвёрок вершин так, что каждое ребро попадёт ровно в одну четвёрку.

2. **(а)** В меню столовой есть $n$ салатов, $n$ супов и $n$ вторых блюд. Обед состоит из салата, супа и второго блюда. Какое максимальное число обедов можно устроить так, чтобы никакая пара блюд не повторилась?
**(б)** А теперь в меню есть $n$ десертов, и обед включает в себя ещё и десерт (всего четыре блюда). Какое максимальное число обедов можно устроить так, чтобы никакая тройка блюд не повторилась?
**(в)** Пусть $n$ — нечётное число. Какое максимальное число обедов из четырёх блюд можно устроить так, чтобы никакая **пара** блюд неповторилась?

3. В чемпионате по футболу участвуют $n > 1$ команд. Нужно составить расписание игр так, чтобы каждая команда сыграла с каждой и чтобы никакой команде не пришлось играть две игры за день. Докажите, что
**(а)** если $n$ нечётно, то можно провести чемпионат за $n$ дней;
**(б)** если $n$ чётно, то можно провести чемпионат за $n-1$ день.

4. Алфавит состоит из $k$ букв, словом считается любая последовательность из $n$ букв алфавита. Два слова *похожи*, если они различаются ровно в одной букве. В какое минимальное число цветов можно раскрасить все слова, так чтобы любые два похожих слова были разного цвета?

5. При каких натуральных значениях $n$ все рёбра полного графа на $n$ вершинах можно раскрасить в несколько цветов таким образом, чтобы рёбра каждого цвета образовывали **(а)** путь; **(б)** цикл, проходящий по всем вершинам ровно по одному разу?

6. Компания из 1024 друзей — завсегда́таи клуба интеллектуальных игр. На каждую игру выставляется команда из четырёх человек. Какое минимальное число игр потребуется друзьям для того, чтобы любые трое из них хотя бы раз оказались в одной команде?

7. В турнире по шведкам участвовали $n$ спортсменов. В каждой игре одна пара участников играла против другой пары. В конце турнира выяснилось, что любые два участника ровно в одной игре оказывались соперниками. При каких натуральных $n$ такое возможно?

# Алгебраические конструкции, добавка

**8.** Докажите, в клетчатом квадрате $997 \times 997$ можно отметить 997 клеток так, чтобы центры никаких трёх отмеченных клеток не лежали на одной прямой.

**9.** В турнире по волейболу участвуют 16 команд. В один игровой день разрешается выбрать 6 команд и провести среди них полный однокруговой турнир, в результате которого каждая из 6 команд сыграет с каждой по одному разу. Какое наименьшее число дней потребуется для того, чтобы каждая команда успела сыграть с каждой по два раза?

# Кооперативные стратегии

**1.** Каждому из $n$ мудрецов надевают колпак одного из $n$ цветов. Каждый мудрец видит колпаки других мудрецов, но не видит своего. Они должны одновременно попытаться угадать цвет своего колпака, написав его на бумажках. Докажите, что мудрецы могут заранее договориться действовать так, чтобы хотя бы один из них угадал, если **(а)** $n = 2$; **(б)** $n = 3$; **(в)** $n$ — любое.

**2.** В сундуке 5 колпаков различных цветов. Из сундука вытащили три колпака и вслепую надели троим мудрецам. Мудрецы видят колпаки друг друга, но не видят свой и одновременно пытаются его угадать. Могут ли мудрецы договориться действовать так, чтобы гарантированно хотя бы один из них угадывал?

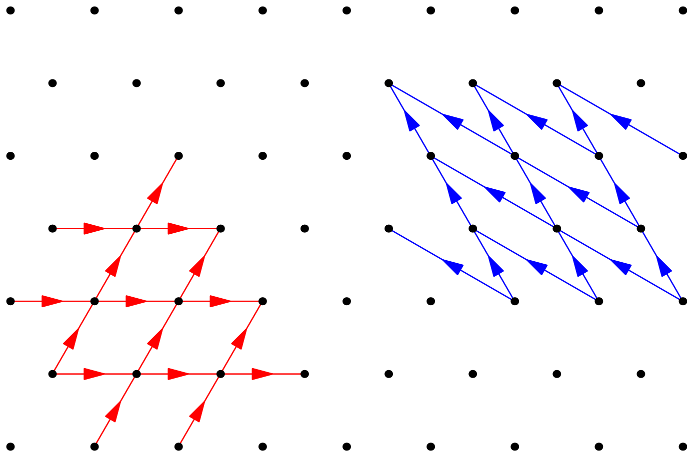
**3.** Фокусник с помощником показывают фокус. Зритель выбирает любые две из 13 стоящих в ряд изначально пустых шкатулок и в присутствии помощника кладёт туда по гранате. Затем приходит фокусник. Помощник открывает одну шкатулку, в которой нет гранаты. Далее фокусник должен выбрать ещё восемь шкатулок и одновременно открыть. Как фокуснику и помощнику договориться так, чтобы все открытые шкатулки оказались пустые?

**4.** В сундуке лежат семь колпаков семи цветов радуги. Шестерым гномам вслепую надевают шесть из них на головы. Каждый гном видит колпаки остальных гномов, но не видит свой. Гномы должны одновременно попытаться угадать цвет оставшегося в сундуке колпака. Как гномам договориться заранее так, чтобы как минимум трое всегда угадывали?

ıДаны натуральные числа $a_1, a_2, \dots, a_n$. Есть $n$ мудрецов, и мудрецу с номером $i$ на лоб пишут число от 1 до $a_i$. Все мудрецы видят числа всех других мудрецов, но не видят своих. Они должны одновременно попытаться угадать число на своём лбу. Обозначим $S = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}$. Докажите, что если

# Решётки

*Решёткой* будем называть множество $\Lambda$ всех точек с целыми координатами в некоторой не обязательно прямоугольной системе координат. Иными словами, $\Lambda$ — решётка, если $\Lambda = \{O + m\vec{u} + n\vec{v} \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ для некоторых неколлинеарных векторов $\vec{u}, \vec{v}$ и точки $O$.



1. В вершинах некоторого квадрата сидит по одному кузнечику. Каждый миг ровно один кузнечик перепрыгивает центрально-симметрично через какого-то другого.
**(а)** Могут ли кузнечики когда-нибудь оказаться в вершинах меньшего квадрата, чем изначальный?
**(б)** Докажите, что если кузнечики вновь оказались в вершинах изначального квадрата, то каждый вернулся именно на свою стартовую позицию.
**(в)** Могут ли кузнечики когда-нибудь оказаться в вершинах бóльшего квадрата, чем изначальный?

2. Докажите, что в любой (не обязательно квадратной) решётке можно выбрать три узла так, чтобы треугольник с вершинами в них не содержал других узлов (даже на границе) и не имел тупых углов.

3. **(а)** Докажите, что среди любых пяти узлов клетчатой сетки найдутся два, середина отрезка между которыми — тоже узел. **(б)** Для какого минимального $k$ среди любых $k$ узлов сетки из правильных шестиугольников найдутся два, середина отрезка между которыми — тоже узел?

**4.** На плоскости расположено несколько одинаковых **(а)** квадратов; **(б)** правильных шестиугольников, соответственные стороны которых параллельны друг другу. Докажите, что в плоскость можно вбить несколько точечных гвоздей так, чтобы каждая фигура была прибита ровно одним гвоздем. *Условимся считать, что если гвоздь вбит в границу фигуры, то мы сами решаем, прибита фигура этим гвоздём или нет.*

**5.** На коодинатной плоскости отмечены две целые точки $A$ и $B$. Рассматриваются всевозможные целые точки $X$ плоскости, для которых площадь треугольника $ABX$ равна 1. Чему может быть равна сумма углов $\angle AXB$ по всем таким треугольникам?

**6.** Внутри правильного треугольника отмечена точка. Её отразили несколько раз относительно сторон треугольника (в каком-то порядке), и она опять попала внутрь треугольника. Докажите, что она вернулась на исходное место.

**7.** Из бумаги вырезана фигура площади строго меньше 1. Докажите, что фигуру можно наложить на координатную плоскость так, чтобы внутри фигуры не оказалось ни одной целой точки.

**8.** Дан бумажный треугольник площади 0.5, в котором длины всех трёх сторон, возведённые в квадрат — целые числа.
**(a)** Докажите, что треугольник можно расположить на координатной плоскости так, чтобы его вершины оказались в целых точках.
**(b)** Докажите, что в треугольник можно завернуть квадрат площади 0.25 клеток. Треугольник можно перегибать, но нельзя рвать. Квадрат должен быть полностью завёрнут с обеих сторон.

Часть II

# Группа 8–2

# 4. Алгебра

# Неравенство о средних

**Определение.** Выражения

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n},\ \sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n},\ \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}},\ \sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{n}}$$

называются соответственно *средним арифметическим*, *средним геометрическим*, *средним гармоническим* и *средним квадратическим* набора неотрицательных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Утверждается, что выполнено следующее неравенство:

$$\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{n}} \geqslant \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n} \geqslant \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}},$$

причём равенство достигается тогда и только тогда, когда все переменные равны между собой.

В дальнейшем предполагается, что фигурирующие в задаче переменные вещественные и положительные, если не обговорено иное.

**1.** **(а)** Докажите неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим для $n = 2^k$ переменных индукцией по $k$.
**(б)** Из неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим для $n$ выведите его для $n-1$ переменных.
**(в)** Докажите неравенство между средним геометрическим и средним гармоническим для $n$ переменных.
**(г)** Докажите неравенство между средним квадратическим и средним арифметическим для $n$ переменных.

**2.** **(а)** Докажите, что $a^5+b^5+c^5 \geqslant abc(a^2+b^2+c^2)$,
**(б)** Найдите наименьшее возможное $M$, такое что

$$M(a^5+b^5+c^5) \geqslant a^4b+b^4a+c^4a+a^4c+b^4c+c^4b$$

для любых $a, b, c > 0$.

**3.** Докажите, что $2\sqrt{a}+3\sqrt[3]{b} \geqslant 5\sqrt[5]{ab}$.

**4.** Докажите неравенство $\sqrt{-3a^2+24a-19}+\sqrt{a^2+13}+\sqrt{2a^2-24a+153}<21$.

**5.** Найдите минимальное значение выражения $a^{40}+\frac{1}{a^{16}}+\frac{2}{a^4}+\frac{4}{a^2}+\frac{8}{a}\geqslant 16$.

**6.** Даны вещественные $x_0\geqslant x_1\geqslant\dots\geqslant x_n$. Докажите, что

$$x_0+\frac{1}{x_0-x_1}+\frac{1}{x_1-x_2}+\dots+\frac{1}{x_{n-1}-x_n}\geqslant x_n+2n.$$

**7.** Произведение чисел $a, b, c$ равно 1. Докажите, что

**(а)** $(2+a)(2+b)(2+c)\geqslant 27$,

**(б)** $a^2+b^2+c^2\geqslant a+b+c$.

**8.** Докажите, что для любого натурального $n$ верно $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}>\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$.

# Неравенство о средних. Добавка

**1.** Для натуральных чисел $n$ и $m$ докажите неравенство

$$2\sqrt[n+m]{n^{2m}m^{2n}} \leqslant n^2 + m^2.$$

**2.** Числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ удовлетворяют соотношению

$$\frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_2} + \ldots + \frac{1}{1+a_n} = 1.$$

Докажите, что $a_1 a_2 \ldots a_n \geqslant (n-1)^n$.

**3.** Числа $a_i$, $i = 0 \ldots 2n-1$, $n \geqslant 4$ удовлетворяют соотношениям

$$a_{2k} = a_{2k-1} + a_{2k+1}, \quad a_{2k+1} = \frac{1}{a_{2k}} + \frac{1}{a_{2k+2}}$$

для $k = 0 \ldots n$ (индексы в этих соотношениях берутся по модулю $2n$). Докажите, что все $a_i$ с чётными индексами $i$ равны между собой.

# Двигаем вдоль прямой

*Основная мысль.* Линейная функция $y = kx + b$ заданная на отрезке $[a, b]$ достигает своего максимума на концах отрезка.

1. Докажите, что вещественные числа $0 \leqslant a_1, a_2, \ldots a_n \leqslant 1$ удовлетворяют неравенству $a_1 + a_2 + \ldots + a_n - 2a_1a_2 \ldots a_n \leqslant n - 1$.

2. Найдите максимальное значение суммы $a_1(1-a_2)+a_2(1-a_3)+\ldots+a_n(1-a_1)$, если $\frac{1}{2} \leqslant a_1, a_2, \ldots a_n \leqslant 1$

3. Для положительных вещественных чисел $x, y, z \geqslant 1$ докажите, что $xy + xz + yz \leqslant 2xyz + 1$.

4. Докажите, что площадь треугольника, лежащего внутри единичного квадрата, не превосходит $1/2$.

5. Для неотрицательных чисел $x, y, z$ докажите неравенство
$$\min\{(x-y)^2, (y-z)^2, (x-z)^2\} \leqslant \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2}.$$
*Подсказка:* докажите для начала, что одно из чисел можно сделать равным нулю.

6. Для положительных чисел $a$, $b$ и $c$ докажите, что
$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc \geqslant 2(a-b)(b-c).$$

7. На плоскости с введённой декартовой системой координат $Oxy$ нарисован многоугольник. Рассматривается некоторое выражение вида $z = ax+by$, где $a, b$ — константы, а точка $(x, y)$ лежит внутри многоугольника (возможно на границе). Докажите, что максимум этого выражения достигается в вершинах многоугольника.

8. Михаил пошёл на рынок покупать раков. У местного продавца можно купить либо больших раков по 5 рублей, либо маленьких по 3. Михаил хочет купить такое количество раков, что соблюдаются следующие требования:
   - удвоенное количество больших раков плюс количество маленьких раков не превышает 36,

- ушестеренное количество больших раков плюс упятеренное количество маленьких раков не превышает 120,
- удевятеренное количество больших раков плюс упятеренное количество маленьких раков не превышает 150.

Как ему потратить как можно больше денег?

# Метод Штурма

**1.** Что происходит с выражениями $a+b$, $ab$, $a^n+b^n$, $a^{-1}+b^{-1}$, где $n$ — натуральное, при сближении двух положительных чисел $a$ и $b$ **(а)** при фиксированной сумме $a+b$, **(б)** при фиксированном произведении $ab$?

**2.** С помощью метода Штурма докажите неравенство о средних между
**(а)** средним квадратическим и средним арифметическим,
**(б)** средним геометрическим и средним гармоническим.

**3.** Пусть $g$ среднее геометрическое чисел положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Докажите неравенство

$$(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n) \geqslant (1+g)^n.$$

**4.** Найдите наибольшее значение выражения $\sqrt{1+5x}+\sqrt{1+5y}+\sqrt{1+5z}$, если сумма положительных чисел $x+y+z$ равна 1.

**5.** Сумма неотрицательных чисел $a$, $b$, $c$, $d$ равна 4. Докажите неравенство

$$(a^2+b^2)cd+(c^2+d^2)ab \leqslant 4.$$

**6.** Даны положительные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ с суммой равной 1. Докажите, что
**(а)** $(1-a_1)(1-a_2)\ldots(1-a_n) \geqslant a_1a_2\ldots a_n(n-1)^n$,
**(б)** $(1+a_1)(2+a_2)\ldots(n+a_n) \leqslant 2n!$.

**7.** **(а)** Положительные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ таковы, что $a_i < 1$ при $i = 1, \ldots, n$. Докажите, что

$$\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{1+a_2}+\ldots+\frac{1}{1+a_n} \leqslant \frac{n}{1+\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}}.$$

**(б)** Что произойдёт с неравенством, если заменить требование $a_i < 1$ на $a_i > 1$?

**8.** Докажите, что $0 \leqslant xy+xz+yz-2xyz \leqslant \frac{7}{27}$ при $x, y, z \geqslant 0$ и $x+y+z=1$.

# Неравенство Коши-Буняковского-Шварца

**Неравенство КБШ.** Для любых вещественных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n$ выполнено неравенство

$$(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2) \geqslant (a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2$$

1. Докажите неравенство КБШ.

2. **Лемма Титу (КБШ для дробей).** Для вещественных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и вещественных положительных чисел $b_1, b_2, \ldots, b_n$ докажите, что

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \ldots + \frac{a_n^2}{b_n} \geqslant \frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}.$$

3. Для положительных вещественных чисел $a, b, c$ докажите, что
   **(а)** $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} \geqslant \frac{9}{2(a+b+c)}$,
   **(б)** $\frac{a^2(b+c)}{bc} + \frac{b^2(a+c)}{ac} + \frac{c^2(a+b)}{ab} \geqslant 2(a+b+c)$.
   **(в)** $\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2+2c^2} + \frac{(b+c)^2}{b^2+c^2+2a^2} + \frac{(c+a)^2}{c^2+a^2+2b^2} \leqslant 3$,

4. При каких значениях переменных $(x, y, z)$ достигается минимум выражения $x^2 + y^2 + z^2$, если известно, что $3x - 4y + 5z = 5$?

5. Для положительных чисел $a$ и $b$ докажите, что $a^3 + b^3 > a^2 + b^2$, если известно, что $a^2 + b^2 > a + b$.

6. **Неравенство Несбитта.** Для положительных вещественных чисел $a, b, c$ докажите, что $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}$

7. Докажите, что $\sqrt{x + xyz} \geqslant \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1}$.

8. Положительные вещественные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ удовлетворяют неравенству

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) \leqslant (n + \frac{1}{2})^2.$$

   Докажите, что $\max\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \leqslant 4\min\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

9. Для вещественных чисел $x, y, z$ докажите, что

$$(x^2 + 3)(y^2 + 3)(z^2 + 3) \geqslant (xyz + x + y + z + 4)^2.$$

# Неравенства

Везде в задачах предполагается, что числа вещественные и положительные, если отдельно не обговорено иное.

**1.** Для неотрицательного числа $x$ докажите, что

$$1 + x^{n+1} \geqslant \frac{(2x)^n}{(1+x)^{n-1}}.$$

**2.** Известно, что $a + b + c = 3$. Докажите, что

$$\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \geqslant \frac{3}{2}.$$

**3.** Дан треугольник со сторонами $a, b, c$. Докажите, что

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant 8(a+b-c)(b+c-a)(a+c-b).$$

**4.** Для чисел $a \geqslant b \geqslant c \geqslant d$ докажите неравенство

$$\sqrt[4]{abcd} \leqslant \sqrt{\sqrt{abcd} + \frac{3}{16}(c-d)^2} \leqslant \frac{a+b+c+d}{4}.$$

**5.** Числа $a, b, c, d$ удовлетворяют неравенству $2(a+b+c+d) \geqslant abcd$. Докажите, что $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geqslant abcd$

**6.** Докажите следующее неравенство:

$$\frac{a^3+3b^3}{5a+b} + \frac{b^3+3c^3}{5b+c} + \frac{c^3+3a^3}{5c+a} \geqslant \frac{2}{3}(a^2+b^2+c^2).$$

**7.** Произведение чисел $a, b, c$ равно 1. Докажите, что

$$\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right)\left(b - 1 + \frac{1}{c}\right)\left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \leqslant 1.$$

**8.** Произведение чисел $a, b, c$ равно 1. Докажите, что $\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geqslant \frac{3}{2}$.

**9.** Известно, что $a + b + c + d = 3$. Докажите, что

$$\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} + \frac{1}{d^3} \leqslant \frac{1}{a^3b^3c^3d^3}$$

**10.** Докажите следующее неравенство:

$$(x^5 - x^2 + 3)(y^5 - y^2 + 3)(z^5 - z^2 + 3) \geqslant (x + y + z)^3.$$

# 5. Геометрия

# Движения

1. В треугольнике $ABC$ проведена биссектриса $AL$. Серединный перпендикуляр к отрезку $AL$ пересекает $(ABC)$ в точках $P$ и $Q$. Докажите, что $(PQL)$ касается отрезка $BC$.

2. На диагонали $AC$ квадрата $ABCD$ взята точка $P$. Высоты треугольника $CPD$ пересекаются в точке $H$. Точки $M$ и $N$ — середины отрезков $AD$ и $CD$ соответственно. Докажите, что прямые $PM$ и $NH$ перпендикулярны.

3. На стороне $BC$ прямоугольника $ABCD$ вовне него построен треугольник $PBC$. Докажите, что перпендикуляры, опущенные из точки $A$ на $CP$, из точки $D$ на $BP$ и из точки $P$ на $AD$, пересекаются в одной точке.

4. Дан параллелограмм $ABCD$, отличный от ромба. На сторонах $BC$ и $CD$ выбираются точки $P$ и $Q$ такие, что $CP = CQ$. Докажите, что окружности $(APQ)$ проходят через фиксированную точку, отличную от $A$.

5. В треугольник вписана окружность и к ней проведены касательные, параллельные сторонам треугольника и отличные от сторон. Докажите, что противолежащие стороны образовавшегося шестиугольника попарно равны, а три большие диагонали пересекаются в одной точке.

6. Точка $M$ — середина основания $BC$ равнобедренного треугольника $ABC$. На продолжении отрезков $AC$ и $BC$ выбраны точки $D$ и $E$ соответственно так, что $CM = CD$ и $AC = CE$. Докажите, что окружности $(ABE)$ и $(CDM)$ касаются.

7. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность $\omega$. Точки $E$ и $F$ симметричны точке $A$ относительно середин сторон $BC$ и $CD$. Окружность $(CEF)$ вторично пересекает $\omega$ в точке $X$. Докажите, что $AX$ — диаметр $\omega$.

8. Даны два одинаково ориентированных квадрата $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ (то есть при обходе по часовой стрелке вершины идут в соответствующем порядке). Докажите, что середины отрезков $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$, $DD_1$ образуют квадрат.

9. Дана равнобокая трапеция $ABCD$, в которой $AB \parallel CD$. Пусть $E$ — середина $AC$. Касательная в точке $A$ к окружности $(ABE)$ и касательная в точке $D$ к окружности $(CDE)$ пересекаются в точке $P$. Докажите, что прямая $PE$ касается окружности $(CDE)$.

# Движения. Добавка

1. В остроугольном треугольнике $ABC$ проведена биссектриса $AL$. На продолжении отрезка $LA$ за точку $A$ выбрана точка $K$ так, что $AK = AL$. Окружности $(BLK)$ и $(CLK)$ пересекают отрезки $AC$ и $AB$ в точках $P$ и $Q$ соответственно. Докажите, что прямые $PQ$ и $BC$ параллельны.

2. В неравнобедренном треугольнике $ABC$ провели биссектрису внутреннего угла $AA_1$ и биссектрису внешнего угла $AA_2$. Из точек $A_1$ и $A_2$ провели касательные к окружности $\omega$, вписанной в треугольник $ABC$, отличные от прямой $BC$. Они касаются $\omega$ в точках $D_1$ и $D_2$ соответственно. Докажите, что точки $A$, $D_1$ и $D_2$ лежат на одной прямой.

3. Точка $I$ — центр вписанной окружности треугольника $ABC$. Вписанная окружность касается стороны $AB$ в точке $D$. Вневписанная окружность касается стороны $BC$ в точке $E$. Точка $F$ такова, что $CFDI$ — параллелограмм. Докажите, что $EF \parallel BI$.

# Композиция движений

*Скользящая симметрия* — это композиция осевой симметрии относительно прямой $\ell$ и параллельного переноса на вектор, параллельный $\ell$.

**Пример.** Если прямые $\ell_1$ и $\ell_2$ пересекаются под углом $\varphi$, то композиция $S_{\ell_2} \circ S_{\ell_1}$ является поворотом на угол $2\varphi$ относительно точки пересечения прямых.

1. Прямые $\ell_1$ и $\ell_2$ параллельны. Чему равна композиция $S_{\ell_2} \circ S_{\ell_1}$? А $S_{\ell_1} \circ S_{\ell_2}$?

2. **(а)** Чему равна композиция $T_{\vec{v}} \circ S_{\ell}$, если $\vec{v}$ перпендикулярен $\ell$?
   **(б)** Чему равна композиция $T_{\vec{v}} \circ S_{\ell}$, если $\vec{v}$ не параллелен $\ell$?

3. **(а)** Верно ли, что любой поворот и любой параллельный перенос можно представить как композицию двух осевых симметрий? Единственно ли такое представление?
   **(б)** Посмотрите на предыдущий пункт и найдите композиции $T_{\vec{v}} \circ R_O^{\varphi}$ и $R_O^{\varphi} \circ T_{\vec{v}}$.

4. Даны пересекающиеся прямые $\ell$ и $m$. Найдите все движения $F$ такие, что $S_\ell \circ F = S_m$.

5. **(а)** Даны два треугольника $ABC$ и $A_1B_1C_1$. Докажите, что существует не более одного движения, которое переводит один треугольник в другой (соответственные вершины — в соответственные).
   **(б)** Докажите, что любое движение можно представить как композицию не более чем трёх симметрий.
   **(в)** **Теорема Шаля.** Докажите, что любое движение плоскости — это либо поворот, либо параллельный перенос, либо симметрия, либо скользящая симметрия.

Треугольники $ABC$ и $A_1B_1C_1$ называются *одинаково ориентированными*, если обходы вершин $A \to B \to C \to A$ и $A_1 \to B_1 \to C_1 \to A_1$ происходят либо оба по часовой стрелке, либо оба против часовой стрелки. Важное наблюдение: скользящая симметрия меняет ориентацию, а поворот и параллельный перенос — нет.

6. Треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ равны и противоположно ориентированы. Докажите, что середины отрезков $A_1A_2$, $B_1B_2$ и $C_1C_2$ лежат на одной прямой.

7. В остроугольном треугольнике $ABC$ точка $O$ — центр его описанной окружности, $H$ — основание высоты из вершины $A$. Пусть $P$ — произвольная точка

плоскости. Точка $Q$ симметрична $P$ относительно $AB$, точка $R$ симметрична $Q$ относительно $AH$, точка $S$ симметрична $R$ относительно $AC$. Докажите, что $OP = OS$.

**8.** Каждый из узлов бесконечного листа клетчатой бумаги раскрашен в один из двух цветов: чёрный или белый. Докажите, что существует бесконечное одноцветное множество узлов, имеющее центр симметрии.

# Композиция поворотов

**Факт.** Пусть $A$ и $B$ — две различные точки плоскости. Тогда

$$R_B^\beta \circ R_A^\alpha = \begin{cases} R_C^{\alpha+\beta}, & \text{если } \alpha+\beta \not\equiv 0 \pmod{360}, \\ T_{\vec{v}}, & \text{если } \alpha+\beta \equiv 0 \pmod{360}, \end{cases}$$

для некоторой точки $C$ и некоторого вектора $\vec{v}$.

**Теорема Наполеона.** На сторонах треугольника вовне построены правильные треугольники. Тогда их центры образуют правильный треугольник.

1. На сторонах треугольника $ABC$ вовне построены равносторонние треугольники $ABC_1$ и $ACB_1$, а внутрь — равносторонний треугольник $BCA_1$. Точка $M$ — центр треугольника $BCA_1$. Докажите, что треугольник $B_1C_1M$ — равнобедренный с углом 120°.

2. На сторонах $AB$ и $AC$ треугольника $ABC$ во внешнюю сторону построены квадраты $ABLK$ и $ACMN$ соответственно. Точка $D$ — середина отрезка $LM$. Найдите углы треугольника $BCD$.

3. Круг поделили хордой $AB$ на два круговых сегмента и один из них повернули на некоторый угол вокруг точки $A$. Пусть при этом повороте точка $B$ перешла в точку $C$. Докажите, что отрезки, соединяющие середины дуг сегментов с серединой отрезка $BC$, перпендикулярны друг другу.

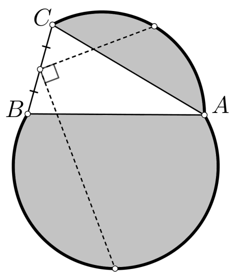



Рис. 2: К задаче 5

4. Вписанная в треугольник $ABC$ окружность касается стороны $BC$ в точке $A_1$. На биссектрисах углов $B$ и $C$ выбраны точки $X$ и $Y$ соответственно так, что $\angle XA_1Y = 90°$. Докажите, что $\angle XAY = \frac{\angle A}{2}$.

5. На сторонах выпуклого четырёхугольника внешним образом построены квадраты. Докажите, что отрезки, соединяющие центры противоположных квадратов, равны и перпендикулярны.

6. На сторонах треугольника $ABC$ вне него построены треугольники $ABP$ и $ACQ$ такие, что $AP = AB$, $AC = AQ$ и $\angle BAP = \angle QAC$. Отрезки $PC$ и $QB$ пересекаются в точке $R$. Точка $S$ — центр $(BRC)$. Докажите, что $AS \perp PQ$.

7. (*Всерос-2021, 11-4*) В треугольнике $ABC$ биссектрисы $AA_1$ и $CC_1$ пересекаются в точке $I$. Прямая, проходящая через точку $B$ параллельно $AC$ пересекает лучи $AA_1$ и $CC_1$ в точках $A_2$ и $C_2$ соответственно. Точка $O_a$ — центр описанной окружности треугольника $AC_1C_2$, точка $O_c$ — центр описанной окружности треугольника $CA_1A_2$. Докажите, что $\angle O_aBO_c = \angle AIC$.

# Гомотетия

1. В трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) диагонали пересекаются в точке $O$. Перпендикуляры, проведенные из точек $B$ и $C$ соответственно на $AC$ и $BD$, пересекаются в точке $M$, а перпендикуляры из $A$ и $D$ соответственно на $BD$ и $AC$ — в точке $K$. Докажите, что точки $M, K$ и $O$ лежат на одной прямой.

2. **Лемма Архимеда.** Пусть в окружности $\omega$ проведена хорда $AB$, и ещё одна окружность касается $\omega$ в точке $C$ и отрезка $AB$ в точке $D$. Докажите, что прямая $CD$ проходит через середину дуги $AB$, не содержащей $C$.

3. Вписанная окружность треугольника $ABC$ касается его стороны $BC$ в точке $D$. Пусть $DT$ — диаметр вписанной окружности. Прямая $AT$ пересекает сторону $BC$ в точке $X$. Докажите, что $BD = CX$.

4. Дана трапеция $ABCD$ ($BC \parallel AD$ и $AD > BC$), в которой на основаниях выбраны точки $K$ и $L$ так, что прямые $AB, CD$ и $KL$ пересекаются в одной точке. На отрезке $KL$ выбраны такие точки $P$ и $Q$, что $\angle AQD = \angle ABC$ и $\angle BPC = \angle BAD$. Докажите, что четырёхугольник $ABPQ$ вписанный.

5. Дан треугольник $ABC$, в котором $AB \neq AC$. Точка $E$ такова, что $AE = BE$ и $BE \perp BC$. Точка $F$ такова, что $AF = CF$ и $CF \perp BC$. Пусть $D$ — точка пересечения касательной к описанной окружности $ABC$ в точке $A$ и прямой $BC$. Докажите, что точки $D, E, F$ лежат на одной прямой.

6. Три равные окружности $\omega_1, \omega_2$ и $\omega_3$ лежат внутри и касаются сторон треугольника $ABC$: $\omega_1$ сторон $AC$ и $AB$; $\omega_2$ сторон $AB$ и $BC$; $\omega_3$ сторон $AC$ и $BC$. Оказалось, что они еще и имеют общую точку $S$. Докажите, что $S$ лежит на прямой, проходящей через центры вписанной и описанной окружностей треугольника $ABC$.

7. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Прямая $\ell_1$ проходит через точку $A$ параллельно прямой $CD$ и пересекает отрезок $BD$ в точке $E$. Прямая $\ell_2$ проходит через точку $D$ параллельно прямой $AB$ и пересекает отрезок $AC$ в точке $F$. Докажите, что $EF \parallel BC$.

8. Окружность $\omega$ касается сторон $AB$ и $AC$ треугольника $ABC$. Окружность $\Omega$ касается стороны $AC$ и продолжения стороны $AB$ за точку $B$, а также касается $\omega$ в точке $L$, лежащей на стороне $BC$. Прямая $AL$ вторично пересекает $\omega$ и $\Omega$ в точках $K$ и $M$ соответственно. Оказалось, что $KB \parallel CM$. Докажите, что

треугольник $LCM$ равнобедренный.

**9.** Пусть $CE$ — биссектриса в остроугольном треугольнике $ABC$. На внешней биссектрисе угла $ACB$ отмечена точка $D$, а на стороне $BC$ — точка $F$, причем $\angle BAD = 90^\circ = \angle DEF$. Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника $CEF$, лежит на прямой $BD$.

# Ещё чуть-чуть гомотетии

1. Соответствующие стороны неравных треугольников $ABC$ и $A_1B_1C_1$ попарно параллельны. Докажите, что существует гомотетия, которая переводит один треугольник в другой.

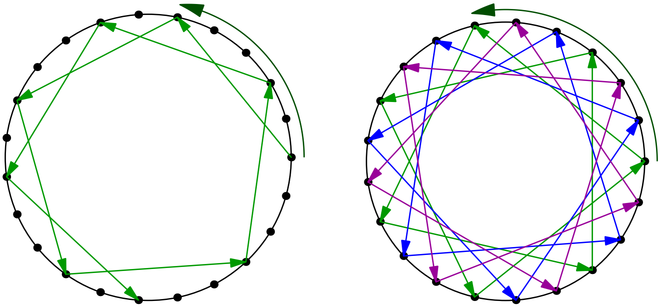
2. Вписанная окружность треугольника $ABC$ касается сторон $AB, AC, BC$ в точках $C', B', A'$ соответственно. Точки $A_1, B_1, C_1$ — середины дуг $BC, AC, AB$ описанной окружности треугольника $ABC$. Докажите, что прямые $A_1A'$, $B_1B'$, $C_1C'$ пересекаются в одной точке.

3. **(а)** Вписанная окружность треугольника $ABC$ касается сторон $AC$ и $AB$ в точках $B_0$ и $C_0$ соответственно. Биссектрисы углов $B$ и $C$ треугольника $ABC$ пересекают серединный перпендикуляр к биссектрисе $AL$ в точках $Q$ и $P$ соответственно. Докажите, что прямые $PC_0$ и $QB_0$ пересекаются на прямой $BC$.
   **(б)** В треугольнике провели биссектрису $AL$. Точки $O_1$ и $O_2$ — центры описанных окружностей треугольников $ABL$ и $ACL$ соответственно. Точки $B_1$ и $C_1$ — проекции вершин $C$ и $B$ на биссектрисы углов $B$ и $C$ соответственно. Докажите, что прямые $O_1C_1$ и $O_2B_1$ пересекаются на прямой $BC$.
   **(в)** Докажите, что точки пересечения из предыдущих пунктов совпадают.

# 6. Комбинаторика

# Прыжки по кругу

**1.** Даны натуральные числа $n$ и $k$, $n > k$. На окружности отмечено $n$ точек, в одной из которых изначально сидит кузнечик. Этот кузнечик может прыгать вдоль окружности против часовой стрелки по отмеченным точкам, каждый раз перепрыгивая через $k-1$ точку.



**(а)** Докажите, что кузнечик побывает во всех отмеченных точках тогда и только тогда, когда НОД$(n, k) = 1$.

**(б)** Назовём *орбитой* точки $A$ множество точек, достижимых из $A$. Докажите, что все отмеченные точки разбиваются на НОД$(n, k)$ попарно непересекающихся одинаковых орбит.

**2.** По кругу лежат 99 карточек с числами от 1 до 99 в порядке возрастания по часовой стрелке. Одна операция меняет местами две карточки, между которыми ровно **(а)** 29; **(б)** 30 других карточек. Можно ли такими операциями упорядочить карточки в порядке возрастания против часовой стрелки?

**3.** На столе лежат два равных картонных правильных 101-угольника. Вершины одного из них пронумерованы подряд числами от 0 до 100 в порядке обхода против часовой стрелки.

**(а)** Докажите, что вершины второго 101-угольника можно так занумеровать числами от 0 до 100, что при любом наложении (без переворота) первого на второй как минимум в одной вершине номера совпадут.

**(б)** Докажите, что число таких нумераций вершин второго многоугольника не меньше 99. (Нумерации, совмещающиеся поворотом, считаем одинаковыми.)

**(в)** Та же задача для двух 111-угольников. Можно ли вершины второго 111-угольника занумеровать так, что при любом наложении (с переворотом **или без**) первого на второй как минимум в одной вершине номера совпадут?

**4.** Окружность длины $n$ разделена точками на $n$ равных дуг. Кузнечик начинает прыгать с некоторой точки и делает $n-1$ прыжков: на 1, на 2, ..., на $n-1$ по часовой стрелке **в некотором** порядке. При каких $n$ кузнечик сможет посетить все отмеченные точки?

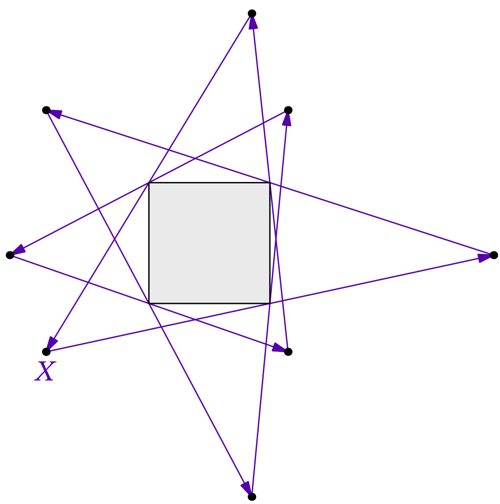
**5.** Окружность длины $n$ разделена точками на $n$ равных дуг. Кузнечик начинает прыгать с некоторой точки и делает $n-1$ прыжков: на 1, на 2, ..., на $n-1$ по часовой стрелке **в указанном** порядке. При каких $n$ кузнечик побывает во всех отмеченных точках?

**6.** Даны натуральные числа $n$ и $k$, $k < n$. В фирме работают $n$ сотрудников, зарплата каждого из которых выражается натуральным числом рублей. Каждый месяц начальник поднимает зарплату на 1 рубль некоторым $k$ сотрудникам. При каких $n$ и $k$ он сможет сделать все зарплаты равными вне зависимости от начального распределения зарплат?

**7.** На плоскости нарисован квадрат площади 1. Для каждой точки $X$ вне квадрата определим операцию *отражения относительно квадрата* следующим образом. Рассмотрим наименьший угол с вершиной $X$, содержащий квадрат, и отразим $X$ относительно наиболее удаленной от $X$ общей точки квадрата и правого луча рассматриваемого угла (эта система называется *внешним бильярдом*). *Периодом* точки назовем наименьшее число отражений относительно квадрата, необходимое для того, чтобы точка вернулась на свое место. Обозначим через $S(n)$ площадь множества точек периода $n$.

**(а)** Докажите, что $S(4) \geqslant 4$ и $S(8) \geqslant 8$.

**(б)** Для каждого натурального $n$ найдите $S(n)$.



# Прыжки по кругу, добавка

**8.** На окружности длины 999 отмечены 999 точек, делящих ее на равные дуги. В каждой отмеченной точке стоит фишка. Назовем *расстоянием* между двумя точками длину меньшей дуги между этими точками. При каком наибольшем $n$ можно переставить фишки так, чтобы в каждой отмеченной точке было по фишке, а расстояние между любыми двумя фишками, изначально удаленными не более, чем на $n$, увеличилось?

**9.** Петя как-то занумеровал вершины правильного $n$-угольника числами от 1 до $n$. Вася первым ходом ставит фишку в какую-то из вершин. Каждым последующим ходом он может передвинуть фишку из вершины $A$ в вершину $B$, если между ними не больше 9 других вершин и число в $B$ больше числа в $A$. Какое наибольшее количество вершин гарантированно сможет посетить Вася, как бы Петя ни нумеровал вершины, если $n = 1001$?

# Алгебраические конструкции

**1.** **(а)** Докажите, что в полном графе на 7 вершинах можно выделить несколько троек вершин так, что каждое ребро попадёт ровно в одну тройку.
**(б)** Докажите, что в полном графе на 13 вершинах можно выбрать несколько четвёрок вершин так, что каждое ребро попадёт ровно в одну четвёрку.

**2.** **(а)** В меню столовой есть $n$ салатов, $n$ супов и $n$ вторых блюд. Обед состоит из салата, супа и второго блюда. Какое максимальное число обедов можно устроить так, чтобы никакая пара блюд не повторилась?
**(б)** А теперь в меню есть $n$ десертов, и обед включает в себя ещё и десерт (всего четыре блюда). Какое максимальное число обедов можно устроить так, чтобы никакая тройка блюд не повторилась?
**(в)** Пусть $n$ — нечётное число. Какое максимальное число обедов из четырёх блюд можно устроить так, чтобы никакая **пара** блюд неповторилась?

**3.** В чемпионате по футболу участвуют $n > 1$ команд. Нужно составить расписание игр так, чтобы каждая команда сыграла с каждой и чтобы никакой команде не пришлось играть две игры за день. Докажите, что
**(а)** если $n$ нечётно, то можно провести чемпионат за $n$ дней;
**(б)** если $n$ чётно, то можно провести чемпионат за $n - 1$ день.

**4.** Алфавит состоит из $k$ букв, словом считается любая последовательность из $n$ букв алфавита. Два слова *похожи*, если они различаются ровно в одной букве. В какое минимальное число цветов можно раскрасить все слова, так чтобы любые два похожих слова были разного цвета?

**5.** При каких натуральных значениях $n$ все рёбра полного графа на $n$ вершинах можно раскрасить в несколько цветов таким образом, чтобы рёбра каждого цвета образовывали **(а)** путь; **(б)** цикл, проходящий по всем вершинам ровно по одному разу?

**6.** Компания из 1024 друзей — завсегда́таи клуба интеллектуальных игр. На каждую игру выставляется команда из четырёх человек. Какое минимальное число игр потребуется друзьям для того, чтобы любые трое из них хотя бы раз оказались в одной команде?

**7.** В турнире по шведкам участвовали $n$ спортсменов. В каждой игре одна пара участников играла против другой пары. В конце турнира выяснилось, что любые два участника ровно в одной игре оказывались соперниками. При каких натуральных $n$ такое возможно?

# Алгебраические конструкции, добавка

**8.** Докажите, в клетчатом квадрате $997 \times 997$ можно отметить 997 клеток так, чтобы центры никаких трёх отмеченных клеток не лежали на одной прямой.

**9.** В турнире по волейболу участвуют 16 команд. В один игровой день разрешается выбрать 6 команд и провести среди них полный однокруговой турнир, в результате которого каждая из 6 команд сыграет с каждой по одному разу. Какое наименьшее число дней потребуется для того, чтобы каждая команда успела сыграть с каждой по два раза?

# Кооперативные стратегии

**1.** Каждому из $n$ мудрецов надевают колпак одного из $n$ цветов. Каждый мудрец видит колпаки других мудрецов, но не видит своего. Они должны одновременно попытаться угадать цвет своего колпака, написав его на бумажках. Докажите, что мудрецы могут заранее договориться действовать так, чтобы хотя бы один из них угадал, если **(а)** $n = 2$; **(б)** $n = 3$; **(в)** $n$ — любое.

**2.** В сундуке 5 колпаков различных цветов. Из сундука вытащили три колпака и вслепую надели троим мудрецам. Мудрецы видят колпаки друг друга, но не видят свой и одновременно пытаются его угадать. Могут ли мудрецы договориться действовать так, чтобы гарантированно хотя бы один из них угадывал?

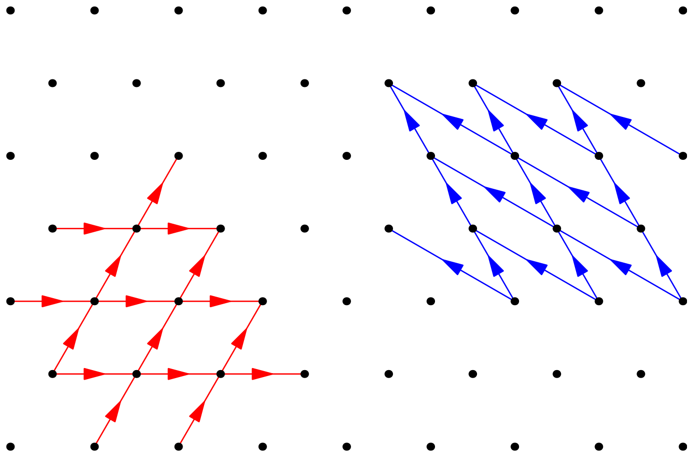
**3.** Фокусник с помощником показывают фокус. Зритель выбирает любые две из 13 стоящих в ряд изначально пустых шкатулок и в присутствии помощника кладёт туда по гранате. Затем приходит фокусник. Помощник открывает одну шкатулку, в которой нет гранаты. Далее фокусник должен выбрать ещё восемь шкатулок и одновременно открыть. Как фокуснику и помощнику договориться так, чтобы все открытые шкатулки оказались пустые?

**4.** В сундуке лежат семь колпаков семи цветов радуги. Шестерым гномам вслепую надевают шесть из них на головы. Каждый гном видит колпаки остальных гномов, но не видит свой. Гномы должны одновременно попытаться угадать цвет оставшегося в сундуке колпака. Как гномам договориться заранее так, чтобы как минимум трое всегда угадывали?

ıДаны натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Есть $n$ мудрецов, и мудрецу с номером $i$ на лоб пишут число от 1 до $a_i$. Все мудрецы видят числа всех других мудрецов, но не видят своих. Они должны одновременно попытаться угадать число на своём лбу. Обозначим $S = \dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \ldots + \dfrac{1}{a_n}$. Докажите, что если

# Решётки

*Решёткой* будем называть множество $\Lambda$ всех точек с целыми координатами в некоторой не обязательно прямоугольной системе координат. Иными словами, $\Lambda$ — решётка, если $\Lambda = \{O + m\vec{u} + n\vec{v} \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ для некоторых неколлинеарных векторов $\vec{u}, \vec{v}$ и точки $O$.



1. В вершинах некоторого квадрата сидит по одному кузнечику. Каждый миг ровно один кузнечик перепрыгивает центрально-симметрично через какого-то другого.
**(а)** Могут ли кузнечики когда-нибудь оказаться в вершинах меньшего квадрата, чем изначальный?
**(б)** Докажите, что если кузнечики вновь оказались в вершинах изначального квадрата, то каждый вернулся именно на свою стартовую позицию.
**(в)** Могут ли кузнечики когда-нибудь оказаться в вершинах бóльшего квадрата, чем изначальный?

2. Докажите, что в любой (не обязательно квадратной) решётке можно выбрать три узла так, чтобы треугольник с вершинами в них не содержал других узлов (даже на границе) и не имел тупых углов.

3. **(а)** Докажите, что среди любых пяти узлов клетчатой сетки найдутся два, середина отрезка между которыми — тоже узел. **(б)** Для какого минимального $k$ среди любых $k$ узлов сетки из правильных шестиугольников найдутся два, середина отрезка между которыми — тоже узел?

**4.** На плоскости расположено несколько одинаковых **(а)** квадратов; **(б)** правильных шестиугольников, соответственные стороны которых параллельны друг другу. Докажите, что в плоскость можно вбить несколько точечных гвоздей так, чтобы каждая фигура была прибита ровно одним гвоздем.
*Условимся считать, что если гвоздь вбит в границу фигуры, то мы сами решаем, прибита фигура этим гвоздём или нет.*

**5.** На коодинатной плоскости отмечены две целые точки $A$ и $B$. Рассматриваются всевозможные целые точки $X$ плоскости, для которых площадь треугольника $ABX$ равна 1. Чему может быть равна сумма углов $\angle AXB$ по всем таким треугольникам?

**6.** Внутри правильного треугольника отмечена точка. Её отразили несколько раз относительно сторон треугольника (в каком-то порядке), и она опять попала внутрь треугольника. Докажите, что она вернулась на исходное место.

**7.** Из бумаги вырезана фигура площади строго меньше 1. Докажите, что фигуру можно наложить на координатную плоскость так, чтобы внутри фигуры не оказалось ни одной целой точки.

**8.** Дан бумажный треугольник площади 0.5, в котором длины всех трёх сторон, возведённые в квадрат — целые числа.
**(a)** Докажите, что треугольник можно расположить на координатной плоскости так, чтобы его вершины оказались в целых точках.
**(b)** Докажите, что в треугольник можно завернуть квадрат площади 0.25 клеток. Треугольник можно перегибать, но нельзя рвать. Квадрат должен быть полностью завёрнут с обеих сторон.

Часть III

# Группа 8–3

# 7. Алгебра

# Неравенство о средних

**Определение.** Выражения

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n},\ \sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n},\ \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}},\ \sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{n}}$$

называются соответственно *средним арифметическим*, *средним геометрическим*, *средним гармоническим* и *средним квадратическим* набора неотрицательных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Утверждается, что выполнено следующее неравенство:

$$\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{n}} \geqslant \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n} \geqslant \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}},$$

причём равенство достигается тогда и только тогда, когда все переменные равны между собой.

В дальнейшем предполагается, что фигурирующие в задаче переменные вещественные и положительные, если не обговорено иное.

1. **(а)** Докажите неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим для $n = 2^k$ переменных индукцией по $k$.
   **(б)** Из неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим для $n$ выведите его для $n-1$ переменных.
   **(в)** Докажите неравенство между средним геометрическим и средним гармоническим для $n$ переменных.
   **(г)** Докажите неравенство между средним квадратическим и средним арифметическим для $n$ переменных.

2. **(а)** Докажите, что $a^5+b^5+c^5 \geqslant abc(a^2+b^2+c^2)$,
   **(б)** Найдите наименьшее возможное $M$, такое что
   $$M(a^5+b^5+c^5) \geqslant a^4b+b^4a+c^4a+a^4c+b^4c+c^4b$$
   для любых $a, b, c > 0$.

3. Докажите неравенство $\sqrt{a+1}+\sqrt{2a-3}+\sqrt{50-3a} < 12$.

**4.** Докажите, что $2\sqrt{a} + 3\sqrt[3]{b} \geqslant 5\sqrt[5]{ab}$.

**5.** Найдите минимальное значение выражения $a^{40} + \frac{1}{a^{16}} + \frac{2}{a^4} + \frac{4}{a^2} + \frac{8}{a} \geqslant 16$.

**6.** Даны вещественные $x_0 \geqslant x_1 \geqslant \cdots \geqslant x_n$. Докажите, что

$$x_0 + \frac{1}{x_0 - x_1} + \frac{1}{x_1 - x_2} + \cdots + \frac{1}{x_{n-1} - x_n} \geqslant x_n + 2n.$$

**7.** Докажите, что $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant a + b + c$, если известно, что $abc = 1$.

**8.** Докажите, что для любого натурального $n$ верно $\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

# Неравенство о средних. Добавка

**1.** Для натуральных чисел $n$ и $m$ докажите неравенство

$$2\sqrt[n+m]{n^{2m}m^{2n}} \leqslant n^2 + m^2.$$

**2.** Числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ удовлетворяют соотношению

$$\frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_2} + \ldots + \frac{1}{1+a_n} = 1.$$

Докажите, что $a_1 a_2 \ldots a_n \geqslant (n-1)^n$.

**3.** Числа $a_i$, $i = 0 \ldots 2n-1$, $n \geqslant 4$ удовлетворяют соотношениям

$$a_{2k} = a_{2k-1} + a_{2k+1}, \quad a_{2k+1} = \frac{1}{a_{2k}} + \frac{1}{a_{2k+2}}$$

для $k = 0 \ldots n$ (индексы в этих соотношениях берутся по модулю $2n$). Докажите, что все $a_i$ с чётными индексами $i$ равны между собой.

# Двигаем вдоль прямой

*Основная мысль.* Линейная функция $y = kx + b$ заданная на отрезке $[a, b]$ достигает своего максимума на концах отрезка.

1. Докажите, что вещественные числа $0 \leqslant a_1, a_2, \dots a_n \leqslant 1$ удовлетворяют неравенству $a_1 + a_2 + \dots + a_n - 2a_1a_2 \dots a_n \leqslant n - 1$.

2. Для положительных вещественных чисел $a, b, c, A, B, C, k$ удовлетворяющих равенству $a + A = b + B = c + C = k$, докажите, что $aB + bC + cA \leqslant k^2$.

3. Найдите максимальное значение суммы $a_1(1-a_2)+a_2(1-a_3)+\dots+a_n(1-a_1)$, если $\frac{1}{2} \leqslant a_1, a_2, \dots a_n \leqslant 1$

4. Для положительных вещественных чисел $x, y, z \geqslant 1$ докажите, что $xy + xz + yz \leqslant 2xyz + 1$.

5. Докажите, что площадь треугольника, лежащего внутри единичного квадрата, не превосходит 1/2.

6. Для неотрицательных чисел $x, y, z$ докажите неравенство
$$\min\{(x-y)^2, (y-z)^2, (x-z)^2\} \leqslant \frac{x^2+y^2+z^2}{2}.$$
*Подсказка:* докажите для начала, что одно из чисел можно сделать равным нулю.

7. Для положительных чисел $a$, $b$ и $c$ докажите, что
$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc \geqslant 2(a-b)(b-c).$$

8. На плоскости с введённой декартовой системой координат $Oxy$ нарисован многоугольник. Рассматривается некоторое выражение вида $z = ax+by$, где $a, b$ — константы, а точка $(x, y)$ лежит внутри многоугольника (возможно на границе). Докажите, что максимум этого выражения достигается в вершинах многоугольника.

9. Михаил пошёл на рынок покупать раков. У местного продавца можно купить либо больших раков по 5 рублей, либо маленьких по 3. Михаил хочет купить не менее 15, но не более 25 раков, причём разница между количеством больших и маленьких раков не должна превышать по модулю 7. Как ему потратить как можно больше денег?

# Метод Штурма

1. Что происходит с выражениями $a + b$, $ab$, $a^n + b^n$, $a^{-1} + b^{-1}$, где $n$ — натуральное, при сближении двух положительных чисел $a$ и $b$ **(а)** при фиксированной сумме $a + b$, **(б)** при фиксированном произведении $ab$?

2. С помощью метода Штурма докажите неравенство о средних между
**(а)** средним квадратическим и средним арифметическим,
**(б)** средним геометрическим и средним гармоническим.

3. Пусть $g$ среднее геометрическое чисел положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Докажите неравенство

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \ldots (1 + a_n) \geqslant (1 + g)^n.$$

4. Найдите наибольшее значение выражения $\sqrt{1 + 5x} + \sqrt{1 + 5y} + \sqrt{1 + 5z}$, если сумма положительных чисел $x + y + z$ равна 1.

5. Сумма неотрицательных чисел $a$, $b$, $c$, $d$ равна 4. Докажите неравенство

$$(a^2 + b^2)cd + (c^2 + d^2)ab \leqslant 4.$$

6. Даны положительные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ с суммой равной 1. Докажите, что
**(а)** $(1 - a_1)(1 - a_2) \ldots (1 - a_n) \geqslant a_1 a_2 \ldots a_n (n - 1)^n$,
**(б)** $(1 + a_1)(2 + a_2) \ldots (n + a_n) \leqslant 2n!$.

7. **(а)** Положительные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ таковы, что $a_i < 1$ при $i = 1, \ldots, n$. Докажите, что

$$\frac{1}{1 + a_1} + \frac{1}{1 + a_2} + \ldots + \frac{1}{1 + a_n} \leqslant \frac{n}{1 + \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}}.$$

**(б)** Что произойдёт с неравенством, если заменить требование $a_i < 1$ на $a_i > 1$?

8. Докажите, что $0 \leqslant xy + xz + yz - 2xyz \leqslant \frac{7}{27}$ при $x, y, z \geqslant 0$ и $x + y + z = 1$.

# Метод Штурма. Добавка

**1.** Для неотрицательных чисел $a, b, c$ с суммой равной 3 докажите, что

$$a^2b + b^2c + c^2a \leqslant 4.$$

**2.** Произведение положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ равно 1. Докажите неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n-1) + x_k} \leqslant 1.$$

**3.** Вещественные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ при $n > 3$ таковы, что

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geqslant n, \quad a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 \geqslant n^2.$$

Докажите, что $\max\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \geqslant 2$.

# Неравенство Коши-Буняковского-Шварца

**Неравенство КБШ.** Для любых вещественных чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ и $b_1, b_2, \dots, b_n$ выполнено неравенство

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geqslant (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2$$

**1.** Для положительных вещественных чисел докажите неравенство

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)\left(\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots + \frac{a_n}{b_n}\right) \geqslant (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2.$$

**2.** Используя КБШ докажите неравенство между средним квадратическим и средним арифметическим, а также между средним арифметическим и средним гармоническим.

**3.** **Лемма Титу (КБШ для дробей).** Для вещественных чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ и вещественных положительных чисел $b_1, b_2, \dots, b_n$ докажите, что

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \dots + \frac{a_n^2}{b_n} \geqslant \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \dots + b_n}.$$

**4.** Для положительных вещественных чисел $a, b, c$ докажите, что

**(а)** $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} \geqslant \frac{9}{2(a+b+c)}$,

**(б)** $\frac{a^2(b+c)}{bc} + \frac{b^2(a+c)}{ac} + \frac{c^2(a+b)}{ab} \geqslant 2(a+b+c)$.

**(в)** $\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2+2c^2} + \frac{(b+c)^2}{b^2+c^2+2a^2} + \frac{(c+a)^2}{c^2+a^2+2b^2} \leqslant 3$,

**5.** При каких значениях переменных $(x, y, z)$ достигается минимум выражения $x^2 + y^2 + z^2$, если известно, что $3x - 4y + 5z = 5$?

**6.** Для положительных чисел $a$ и $b$ докажите, что $a^3 + b^3 > a^2 + b^2$, если известно, что $a^2 + b^2 > a + b$.

**7.** **Неравенство Несбитта.** Для положительных вещественных чисел $a, b, c$ докажите, что $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}$

**8.** Докажите, что $\sqrt{x + xyz} \geqslant \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1}$.

# Неравенства

Везде в задачах предполагается, что числа вещественные и положительные, если отдельно не обговорено иное.

**1.** Для неотрицательного числа $x$ докажите, что

$$1 + x^{n+1} \geqslant \frac{(2x)^n}{(1+x)^{n-1}}.$$

**2.** Докажите, что для любых положительных чисел $a_1, \ldots a_n$ выполнено неравенство

$$\left(1 + \frac{a_1^2}{a_2}\right)\left(1 + \frac{a_2^2}{a_3}\right)\ldots\left(1 + \frac{a_n^2}{a_1}\right) \geqslant (1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n)$$

**3.** Известно, что $a + b + c = 3$. Докажите, что

$$\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \geqslant \frac{3}{2}.$$

**4.** Дан треугольник со сторонами $a, b, c$. Докажите, что

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant 8(a+b-c)(b+c-a)(a+c-b).$$

**5.** Для чисел $a \geqslant b \geqslant c \geqslant d$ докажите неравенство

$$\sqrt[4]{abcd} \leqslant \sqrt{\sqrt{abcd} + \frac{3}{16}(c-d)^2} \leqslant \frac{a+b+c+d}{4}.$$

**6.** Числа $a, b, c, d$ удовлетворяют неравенству $2(a+b+c+d) \geqslant abcd$. Докажите, что $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geqslant abcd$

**7.** Докажите следующее неравенство:

$$\frac{a^3+3b^3}{5a+b} + \frac{b^3+3c^3}{5b+c} + \frac{c^3+3a^3}{5c+a} \geqslant \frac{2}{3}(a^2+b^2+c^2).$$

**8.** Произведение чисел $a, b, c$ равно 1. Докажите, что

$$\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right)\left(b - 1 + \frac{1}{c}\right)\left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \leqslant 1.$$

**9.** Произведение чисел $a, b, c$ равно 1. Докажите, что $\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geqslant \frac{3}{2}$.

**10.** Докажите следующее неравенство:

$$(x^5 - x^2 + 3)(y^5 - y^2 + 3)(z^5 - z^2 + 3) \geqslant (x + y + z)^3.$$

# 8. Геометрия

# Движения

1. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ углы $A$ и $D$ равны $\alpha$, а серединные перпендикуляры к сторонам $AB$ и $CD$ пересекаются на стороне $AD$. Найдите угол между диагоналями $AC$ и $BD$.

2. Две окружности равного радиуса касаются в точке $P$. Из неё выпущены два перпендикулярных луча, один из которых пересекает первую окружность в точке $A$, а другой — вторую окружность в точке $B$. Докажите, что длина отрезка $AB$ равна диаметру каждой из окружностей.

3. В треугольнике $ABC$ проведена биссектриса $AL$. Серединный перпендикуляр к отрезку $AL$ пересекает $(ABC)$ в точках $P$ и $Q$. Докажите, что $(PQL)$ касается отрезка $BC$.

4. На диагонали $AC$ квадрата $ABCD$ взята точка $P$. Высоты треугольника $CPD$ пересекаются в точке $H$. Точки $M$ и $N$ — середины отрезков $AD$ и $CD$ соответственно. Докажите, что прямые $PM$ и $NH$ перпендикулярны.

5. На стороне $BC$ прямоугольника $ABCD$ вовне него построен треугольник $PBC$. Докажите, что перпендикуляры, опущенные из точки $A$ на $CP$, из точки $D$ на $BP$ и из точки $P$ на $AD$, пересекаются в одной точке.

6. Дан параллелограмм $ABCD$, отличный от ромба. На сторонах $BC$ и $CD$ выбираются точки $P$ и $Q$ такие, что $CP = CQ$. Докажите, что окружности $(APQ)$ проходят через фиксированную точку, отличную от $A$.

7. В треугольник вписана окружность и к ней проведены касательные, параллельные сторонам треугольника и отличные от сторон. Докажите, что противолежащие стороны образовавшегося шестиугольника попарно равны, а три большие диагонали пересекаются в одной точке.

8. Точка $M$ — середина основания $BC$ равнобедренного треугольника $ABC$. На продолжении отрезков $AC$ и $BC$ выбраны точки $D$ и $E$ соответственно так, что $CM = CD$ и $AC = CE$. Докажите, что окружности $(ABE)$ и $(CDM)$ касаются.

9. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность $\omega$. Точки $E$ и $F$ симметричны точке $A$ относительно середин сторон $BC$ и $CD$. Окружность $(CEF)$ вторично пересекает $\omega$ в точке $X$. Докажите, что $AX$ — диаметр $\omega$.

**10.** Даны два одинаково ориентированных квадрата $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ (то есть при обходе по часовой стрелке вершины идут в соответствующем порядке). Докажите, что середины отрезков $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$, $DD_1$ образуют квадрат.

# Композиция движений

*Скользящая симметрия* — это композиция осевой симметрии относительно прямой $\ell$ и параллельного переноса на вектор, параллельный $\ell$.

**Пример.** Если прямые $\ell_1$ и $\ell_2$ пересекаются под углом $\varphi$, то композиция $S_{\ell_2} \circ S_{\ell_1}$ является поворотом на угол $2\varphi$ относительно точки пересечения прямых.

**1.** Прямые $\ell_1$ и $\ell_2$ параллельны. Чему равна композиция $S_{\ell_2} \circ S_{\ell_1}$? А $S_{\ell_1} \circ S_{\ell_2}$? *Указание.* Тут (да и в следующей задаче) полезно ввести координаты, чтобы не страдать с перебором случаев.

**2.** **(а)** Чему равна композиция $T_{\vec{v}} \circ S_{\ell}$, если $\vec{v}$ перпендикулярен $\ell$?
**(б)** Чему равна композиция $T_{\vec{v}} \circ S_{\ell}$, если $\vec{v}$ не параллелен $\ell$?

**3.** **(а)** Верно ли, что любой поворот и любой параллельный перенос можно представить как композицию двух осевых симметрий? Единственно ли такое представление?
**(б)** Посмотрите на предыдущий пункт и найдите композиции $T_{\vec{v}} \circ R_O^{\varphi}$ и $R_O^{\varphi} \circ T_{\vec{v}}$.

**4.** Даны пересекающиеся прямые $\ell$ и $m$. Найдите все движения $F$ такие, что $S_{\ell} \circ F = S_m$.

**5.** **(а)** Даны два треугольника $ABC$ и $A_1B_1C_1$. Докажите, что существует не более одного движения, которое переводит один треугольник в другой (соответственные вершины — в соответственные).
**(б)** Докажите, что любое движение можно представить как композицию не более чем трёх симметрий.
**(в)** **Теорема Шаля.** Докажите, что любое движение плоскости — это либо поворот, либо параллельный перенос, либо симметрия, либо скользящая симметрия.

Треугольники $ABC$ и $A_1B_1C_1$ называются *одинаково ориентированными*, если обходы вершин $A \to B \to C \to A$ и $A_1 \to B_1 \to C_1 \to A_1$ происходят либо оба по часовой стрелке, либо оба против часовой стрелки. Важное наблюдение: скользящая симметрия меняет ориентацию, а поворот и параллельный перенос — нет.

**6.** Треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ равны и противоположно ориентированы. Докажите, что середины отрезков $A_1A_2$, $B_1B_2$ и $C_1C_2$ лежат на одной прямой.

**7.** В остроугольном треугольнике $ABC$ точка $O$ — центр его описанной окружности, $H$ — основание высоты из вершины $A$. Пусть $P$ — произвольная точка плоскости. Точка $Q$ симметрична $P$ относительно $AB$, точка $R$ симметрична $Q$ относительно $AH$, точка $S$ симметрична $R$ относительно $AC$. Докажите, что $OP = OS$.

**8.** Каждый из узлов бесконечного листа клетчатой бумаги раскрашен в один из двух цветов: чёрный или белый. Докажите, что существует бесконечное одноцветное множество узлов, имеющее центр симметрии.

# Композиция поворотов

**Факт.** Пусть $A$ и $B$ — две различные точки плоскости. Тогда

$$R_B^\beta \circ R_A^\alpha = \begin{cases} R_C^{\alpha+\beta}, & \text{если } \alpha+\beta \not\equiv 0 \pmod{360^\circ}, \\ T_{\vec{v}}, & \text{если } \alpha+\beta \equiv 0 \pmod{360^\circ}, \end{cases}$$

для некоторой точки $C$ и некоторого вектора $\vec{v}$.

**Теорема Наполеона.** На сторонах треугольника вовне построены правильные треугольники. Тогда их центры образуют правильный треугольник.

1. С центрами в точках $A$ и $B$ сделали повороты на некоторые углы. Определите, какими должны быть композиции, чтобы центры полученных поворотов совпадали с точками $C$, $D$, $E$, $F$ (см. рисунок).

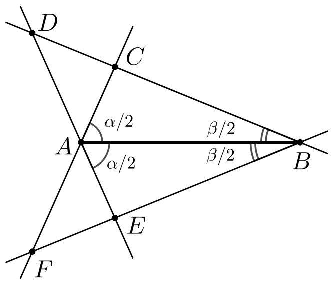



Рис. 3: К задаче 1

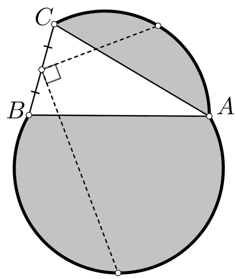



Рис. 4: К задаче 5

2. В шестиугольнике $ABCDEF$ выполнены равенства $AB = AF$, $BC = CD$, $DE = EF$ и сумма углов $A$, $C$, $E$ равна $360^\circ$. Докажите, что углы треугольника $ACE$ в два раза меньше соответствующих углов $A$, $C$, $E$ шестиугольника.

3. На сторонах треугольника $ABC$ вовне построены равносторонние треугольники $ABC_1$ и $ACB_1$, а внутрь — равносторонний треугольник $BCA_1$. Точка $M$ — центр треугольника $BCA_1$. Докажите, что треугольник $B_1C_1M$ — равнобедренный с углом $120^\circ$.

4. На сторонах $AB$ и $AC$ треугольника $ABC$ во внешнюю сторону построены квадраты $ABLK$ и $ACMN$ соответственно. Точка $D$ — середина отрезка $LM$. Найдите углы треугольника $BCD$.

5. Круг поделили хордой $AB$ на два круговых сегмента и один из них повернули на некоторый угол вокруг точки $A$. Пусть при этом повороте точка $B$ перешла в точку $C$. Докажите, что отрезки, соединяющие середины дуг сегментов с серединой отрезка $BC$, перпендикулярны друг другу.

6. Вписанная в треугольник $ABC$ окружность касается стороны $BC$ в точке $A_1$. На биссектрисах углов $B$ и $C$ выбраны точки $X$ и $Y$ соответственно так, что $\angle XA_1Y = 90°$. Докажите, что $\angle XAY = \frac{\angle A}{2}$.

# Гомотетия

1. В трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) диагонали пересекаются в точке $O$. Перпендикуляры, проведенные из точек $B$ и $C$ соответственно на $AC$ и $BD$, пересекаются в точке $M$, а перпендикуляры из $A$ и $D$ соответственно на $BD$ и $AC$ — в точке $K$. Докажите, что точки $M, K$ и $O$ лежат на одной прямой.

2. Четырёхугольник диагоналями разрезан на четыре треугольника. Докажите, что точки пересечения медиан этих треугольников расположены в вершинах некоторого параллелограмма.

3. Точки $K$ и $L$ на сторонах соответственно $AB$ и $AC$ остроугольного треугольника $ABC$ таковы, что $KL \parallel BC$; $M$ -- точка пересечения перпендикуляров, восстановленных в точках $K$ и $L$ к отрезкам $AB$ и $AC$. Докажите, что точки $A, M$ и центр $O$ описанной окружности треугольника $ABC$ лежат на одной прямой.

4. **Лемма Архимеда.** Пусть в окружности $\omega$ проведена хорда $AB$, и ещё одна окружность касается $\omega$ в точке $C$ и отрезка $AB$ в точке $D$. Докажите, что прямая $CD$ проходит через середину дуги $AB$, не содержащей $C$.

5. Внутри треугольника $ABC$ выбрана точка $X$. Докажите, что прямые, проходящие через середины сторон $AB, AC, BC$ параллельно прямым $CX, BX, AX$ соответственно, пересекаются в одной точке.

6. Вписанная окружность треугольника $ABC$ касается его стороны $BC$ в точке $D$. Пусть $DT$ — диаметр вписанной окружности. Прямая $AT$ пересекает сторону $BC$ в точке $X$. Докажите, что $BD = CX$.

7. Дан треугольник $ABC$, в котором $AB \neq AC$. Точка $E$ такова, что $AE = BE$ и $BE \perp BC$. Точка $F$ такова, что $AF = CF$ и $CF \perp BC$. Пусть $D$ — точка пересечения касательной к описанной окружности $ABC$ в точке $A$ и прямой $BC$. Докажите, что точки $D, E, F$ лежат на одной прямой.

8. Три равные окружности $\omega_1, \omega_2$ и $\omega_3$ лежат внутри и касаются сторон треугольника $ABC$: $\omega_1$ сторон $AC$ и $AB$; $\omega_2$ сторон $AB$ и $BC$; $\omega_3$ сторон $AC$ и $BC$. Оказалось, что они еще и имеют общую точку $S$. Докажите, что $S$ лежит на прямой, проходящей через центры вписанной и описанной окружностей треугольника $ABC$.

**9.** Окружность $\omega$ касается сторон $AB$ и $AC$ треугольника $ABC$. Окружность $\Omega$ касается стороны $AC$ и продолжения стороны $AB$ за точку $B$, а также касается $\omega$ в точке $L$, лежащей на стороне $BC$. Прямая $AL$ вторично пересекает $\omega$ и $\Omega$ в точках $K$ и $M$ соответственно. Оказалось, что $KB \parallel CM$. Докажите, что треугольник $LCM$ равнобедренный.

# Гомотетия. Добавка

1. Соответствующие стороны неравных треугольников $ABC$ и $A_1B_1C_1$ попарно параллельны. Докажите, что существует гомотетия, которая переводит один треугольник в другой.

2. Вписанная окружность треугольника $ABC$ касается сторон $AB$, $AC$, $BC$ в точках $C'$, $B'$, $A'$ соответственно. Точки $A_1$, $B_1$, $C_1$ — середины дуг $BC$, $AC$, $AB$ описанной окружности треугольника $ABC$. Докажите, что прямые $A_1A'$, $B_1B'$, $C_1C'$ пересекаются в одной точке.

3. Дана трапеция $ABCD$ ($BC \parallel AD$ и $AD > BC$), в которой на основаниях выбраны точки $K$ и $L$ так, что прямые $AB$, $CD$ и $KL$ пересекаются в одной точке. На отрезке $KL$ выбраны такие точки $P$ и $Q$, что $\angle AQD = \angle ABC$ и $\angle BPC = \angle BAD$. Докажите, что четырёхугольник $ABPQ$ вписанный.

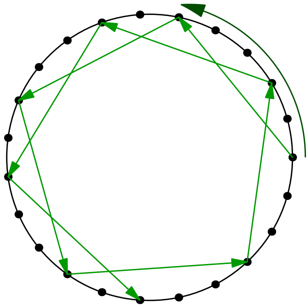
4. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Прямая $\ell_1$ проходит через точку $A$ параллельно прямой $CD$ и пересекает отрезок $BD$ в точке $E$. Прямая $\ell_2$ проходит через точку $D$ параллельно прямой $AB$ и пересекает отрезок $AC$ в точке $F$. Докажите, что $EF \parallel BC$.

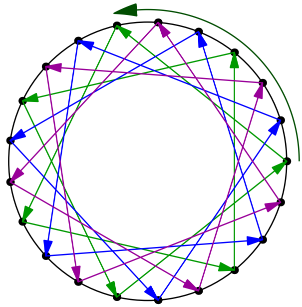
5. Пусть $CE$ — биссектриса в остроугольном треугольнике $ABC$. На внешней биссектрисе угла $ACB$ отмечена точка $D$, а на стороне $BC$ — точка $F$, причем $\angle BAD = 90° = \angle DEF$. Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника $CEF$, лежит на прямой $BD$.

# 9. Комбинаторика

# Прыжки по кругу

**1.** Даны натуральные числа $n$ и $k$, $n > k$. На окружности отмечено $n$ точек, в одной из которых изначально сидит кузнечик. Этот кузнечик может прыгать вдоль окружности против часовой стрелки по отмеченным точкам, каждый раз перепрыгивая через $k - 1$ точку.





**(а)** Докажите, что кузнечик побывает во всех отмеченных точках тогда и только тогда, когда НОД$(n, k) = 1$.

**(б)** Назовём *орбитой* точки $A$ множество точек, достижимых из $A$. Докажите, что все отмеченные точки разбиваются на НОД$(n, k)$ попарно непересекающихся одинаковых орбит.

**2.** По кругу лежат 99 карточек с числами от 1 до 99 в порядке возрастания по часовой стрелке. Одна операция меняет местами две карточки, между которыми ровно **(а)** 29; **(б)** 30 других карточек. Можно ли такими операциями упорядочить карточки в порядке возрастания против часовой стрелки?

**3.** На столе лежат два равных картонных правильных 101-угольника. Вершины одного из них пронумерованы подряд числами от 0 до 100 в порядке обхода против часовой стрелки.

**(а)** Докажите, что вершины второго 101-угольника можно так занумеровать числами от 0 до 100, что при любом наложении (без переворота) первого на второй как минимум в одной вершине номера совпадут.

**(б)** Докажите, что число таких нумераций вершин второго многоугольника не меньше 99. (Нумерации, совмещающиеся поворотом, считаем одинаковыми.)

**(в)** Та же задача для двух 111-угольников. Можно ли вершины второго 111-угольника занумеровать так, что при любом наложении (с переворотом **или без**) первого на второй как минимум в одной вершине номера совпадут?

**4.** Окружность длины $n$ разделена точками на $n$ равных дуг. Кузнечик начинает прыгать с некоторой точки и делает $n-1$ прыжков: на 1, на 2, …, на $n-1$ по часовой стрелке **в некотором** порядке. При каких $n$ кузнечик сможет посетить все отмеченные точки?

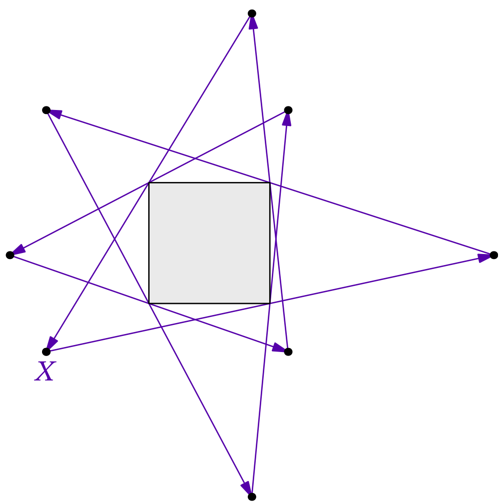
**5.** Окружность длины $n$ разделена точками на $n$ равных дуг. Кузнечик начинает прыгать с некоторой точки и делает $n-1$ прыжков: на 1, на 2, …, на $n-1$ по часовой стрелке **в указанном** порядке. При каких $n$ кузнечик побывает во всех отмеченных точках?

**6.** Даны натуральные числа $n$ и $k$, $k < n$. В фирме работают $n$ сотрудников, зарплата каждого из которых выражается натуральным числом рублей. Каждый месяц начальник поднимает зарплату на 1 рубль некоторым $k$ сотрудникам. При каких $n$ и $k$ он сможет сделать все зарплаты равными вне зависимости от начального распределения зарплат?

**7.** На плоскости нарисован квадрат площади 1. Для каждой точки $X$ вне квадрата определим операцию *отражения относительно квадрата* следующим образом. Рассмотрим наименьший угол с вершиной $X$, содержащий квадрат, и отразим $X$ относительно наиболее удаленной от $X$ общей точки квадрата и правого луча рассматриваемого угла (эта система называется *внешним бильярдом*). *Периодом* точки назовем наименьшее число отражений относительно квадрата, необходимое для того, чтобы точка вернулась на свое место. Обозначим через $S(n)$ площадь множества точек периода $n$.

**(а)** Докажите, что $S(4) \geqslant 4$ и $S(8) \geqslant 8$.

**(б)** Для каждого натурального $n$ найдите $S(n)$.



# Прыжки по кругу, добавка

**8.** На окружности длины 999 отмечены 999 точек, делящих ее на равные дуги. В каждой отмеченной точке стоит фишка. Назовем *расстоянием* между двумя точками длину меньшей дуги между этими точками. При каком наибольшем $n$ можно переставить фишки так, чтобы в каждой отмеченной точке было по фишке, а расстояние между любыми двумя фишками, изначально удаленными не более, чем на $n$, увеличилось?

**9.** Петя как-то занумеровал вершины правильного $n$-угольника числами от 1 до $n$. Вася первым ходом ставит фишку в какую-то из вершин. Каждым последующим ходом он может передвинуть фишку из вершины $A$ в вершину $B$, если между ними не больше 9 других вершин и число в $B$ больше числа в $A$. Какое наибольшее количество вершин гарантированно сможет посетить Вася, как бы Петя ни нумеровал вершины, если $n = 1001$?

# Алгебраические конструкции

**1.** **(а)** Докажите, что в полном графе на 7 вершинах можно выделить несколько троек вершин так, что каждое ребро попадёт ровно в одну тройку.
**(б)** Докажите, что в полном графе на 13 вершинах можно выбрать несколько четвёрок вершин так, что каждое ребро попадёт ровно в одну четвёрку.

**2.** **(а)** В меню столовой есть $n$ салатов, $n$ супов и $n$ вторых блюд. Обед состоит из салата, супа и второго блюда. Какое максимальное число обедов можно устроить так, чтобы никакая пара блюд не повторилась?
**(б)** А теперь в меню есть $n$ десертов, и обед включает в себя ещё и десерт (всего четыре блюда). Какое максимальное число обедов можно устроить так, чтобы никакая тройка блюд не повторилась?
**(в)** Пусть $n$ — нечётное число. Какое максимальное число обедов из четырёх блюд можно устроить так, чтобы никакая **пара** блюд неповторилась?

**3.** В чемпионате по футболу участвуют $n > 1$ команд. Нужно составить расписание игр так, чтобы каждая команда сыграла с каждой и чтобы никакой команде не пришлось играть две игры за день. Докажите, что
**(а)** если $n$ нечётно, то можно провести чемпионат за $n$ дней;
**(б)** если $n$ чётно, то можно провести чемпионат за $n - 1$ день.

**4.** Алфавит состоит из $k$ букв, словом считается любая последовательность из $n$ букв алфавита. Два слова *похожи*, если они различаются ровно в одной букве. В какое минимальное число цветов можно раскрасить все слова, так чтобы любые два похожих слова были разного цвета?

**5.** При каких натуральных значениях $n$ все рёбра полного графа на $n$ вершинах можно раскрасить в несколько цветов таким образом, чтобы рёбра каждого цвета образовывали **(а)** путь; **(б)** цикл, проходящий по всем вершинам ровно по одному разу?

**6.** Компания из 1024 друзей — завсегда́таи клуба интеллектуальных игр. На каждую игру выставляется команда из четырёх человек. Какое минимальное число игр потребуется друзьям для того, чтобы любые трое из них хотя бы раз оказались в одной команде?

**7.** В турнире по шведкам участвовали $n$ спортсменов. В каждой игре одна пара участников играла против другой пары. В конце турнира выяснилось, что любые два участника ровно в одной игре оказывались соперниками. При каких натуральных $n$ такое возможно?

# Алгебраические конструкции, добавка

**8.** Докажите, в клетчатом квадрате $997 \times 997$ можно отметить 997 клеток так, чтобы центры никаких трёх отмеченных клеток не лежали на одной прямой.

**9.** В турнире по волейболу участвуют 16 команд. В один игровой день разрешается выбрать 6 команд и провести среди них полный однокруговой турнир, в результате которого каждая из 6 команд сыграет с каждой по одному разу. Какое наименьшее число дней потребуется для того, чтобы каждая команда успела сыграть с каждой по два раза?

# Кооперативные стратегии

1. Каждому из $n$ мудрецов надевают колпак одного из $n$ цветов. Каждый мудрец видит колпаки других мудрецов, но не видит своего. Они должны одновременно попытаться угадать цвет своего колпака, написав его на бумажках. Докажите, что мудрецы могут заранее договориться действовать так, чтобы хотя бы один из них угадал, если **(а)** $n = 2$; **(б)** $n = 3$; **(в)** $n$ — любое.

2. В сундуке 5 колпаков различных цветов. Из сундука вытащили три колпака и вслепую надели троим мудрецам. Мудрецы видят колпаки друг друга, но не видят свой и одновременно пытаются его угадать. Могут ли мудрецы договориться действовать так, чтобы гарантированно хотя бы один из них угадывал?

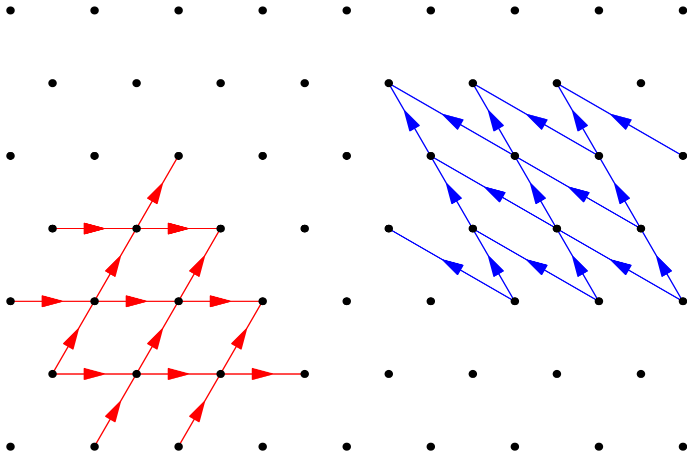
3. Фокусник с помощником показывают фокус. Зритель выбирает любые две из 13 стоящих в ряд изначально пустых шкатулок и в присутствии помощника кладёт туда по гранате. Затем приходит фокусник. Помощник открывает одну шкатулку, в которой нет гранаты. Далее фокусник должен выбрать ещё восемь шкатулок и одновременно открыть. Как фокуснику и помощнику договориться так, чтобы все открытые шкатулки оказались пустые?

4. В сундуке лежат семь колпаков семи цветов радуги. Шестерым гномам вслепую надевают шесть из них на головы. Каждый гном видит колпаки остальных гномов, но не видит свой. Гномы должны одновременно попытаться угадать цвет оставшегося в сундуке колпака. Как гномам договориться заранее так, чтобы как минимум трое всегда угадывали?

   ıДаны натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Есть $n$ мудрецов, и мудрецу с номером $i$ на лоб пишут число от 1 до $a_i$. Все мудрецы видят числа всех других мудрецов, но не видят своих. Они должны одновременно попытаться угадать число на своём лбу. Обозначим $S = \dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \ldots + \dfrac{1}{a_n}$. Докажите, что если

# Решётки

*Решёткой* будем называть множество $\Lambda$ всех точек с целыми координатами в некоторой не обязательно прямоугольной системе координат. Иными словами, $\Lambda$ — решётка, если $\Lambda = \{O + m\vec{u} + n\vec{v} \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ для некоторых неколлинеарных векторов $\vec{u}, \vec{v}$ и точки $O$.



1. В вершинах некоторого квадрата сидит по одному кузнечику. Каждый миг ровно один кузнечик перепрыгивает центрально-симметрично через какого-то другого.
   **(а)** Могут ли кузнечики когда-нибудь оказаться в вершинах меньшего квадрата, чем изначальный?
   **(б)** Докажите, что если кузнечики вновь оказались в вершинах изначального квадрата, то каждый вернулся именно на свою стартовую позицию.
   **(в)** Могут ли кузнечики когда-нибудь оказаться в вершинах бо́льшего квадрата, чем изначальный?

2. **(а)** Докажите, что среди любых пяти узлов клетчатой сетки найдутся два, середина отрезка между которыми — тоже узел. **(б)** Для какого минимального $k$ среди любых $k$ узлов сетки из правильных шестиугольников найдутся два, середина отрезка между которыми — тоже узел?

3. На плоскости расположено несколько одинаковых **(а)** квадратов; **(б)** правильных шестиугольников, соответственные стороны которых параллельны друг другу. Докажите, что в плоскость можно вбить несколько точечных

гвоздей так, чтобы каждая фигура была прибита ровно одним гвоздем. *Условимся считать, что если гвоздь вбит в границу фигуры, то мы сами решаем, прибита фигура этим гвоздём или нет.*

**4.** На коодинатной плоскости отмечены две целые точки $A$ и $B$. Рассматриваются всевозможные целые точки $X$ плоскости, для которых площадь треугольника $ABX$ равна 1. Чему может быть равна сумма углов $\angle AXB$ по всем таким треугольникам?

**5.** Внутри правильного треугольника отмечена точка. Её отразили несколько раз относительно сторон треугольника (в каком-то порядке), и она опять попала внутрь треугольника. Докажите, что она вернулась на исходное место.

**6.** Из бумаги вырезана фигура площади строго меньше 1. Докажите, что фигуру можно наложить на координатную плоскость так, чтобы внутри фигуры не оказалось ни одной целой точки.

**7.** Дан бумажный треугольник площади 0.5, в котором длины всех трёх сторон, возведённые в квадрат — целые числа.
**(а)** Докажите, что в любой (не обязательно квадратной) решётке можно выбрать три узла так, чтобы треугольник с вершинами в них не содержал других узлов (даже на границе) и не имел тупых углов.
**(б)** Докажите, что бумажный треугольник можно расположить на координатной плоскости так, чтобы его вершины оказались в целых точках.
**(в)** Докажите, что в бумажный треугольник можно завернуть квадрат площади 0.25 клеток. Треугольник можно перегибать, но нельзя рвать. Квадрат должен быть полностью завёрнут с обеих сторон.