Отбор на летние сборы. Решения

1. Для вещественных чисел a и b, $a \neq 0$, докажите неравенство

$$a^2 + b^2 + \frac{2}{a^2} + \frac{2b}{a} \geqslant 2.$$

Решение. Цепочка преобразований

$$a^2 + b^2 + \frac{2}{a^2} + \frac{2b}{a} - 2 = \left(a^2 - 2\frac{a}{a} + \frac{1}{a^2}\right) + \left(b^2 + 2\frac{b}{a} + \frac{1}{a^2}\right) =$$
$$= \left(a - \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{a}\right)^2 \geqslant 0$$

доказывает требуемое утверждение.

2. Несколько школьников решали листик с задачами на кружке. Назовём непустое множество школьников *умным*, если каждая задача листика решена хотя бы одним школьником из этого множества. Оказалось, что умное множество можно выделить ровно 63 способами. Докажите, что каждый школьник решил хотя бы одну задачу.

Решение. Предположим, что существует школьник t, не решивший ни одной задачи. Пусть существует n умных множеств, не содержащих t, и m умных множеств, содержащих t. Докажем, что $m = n$.

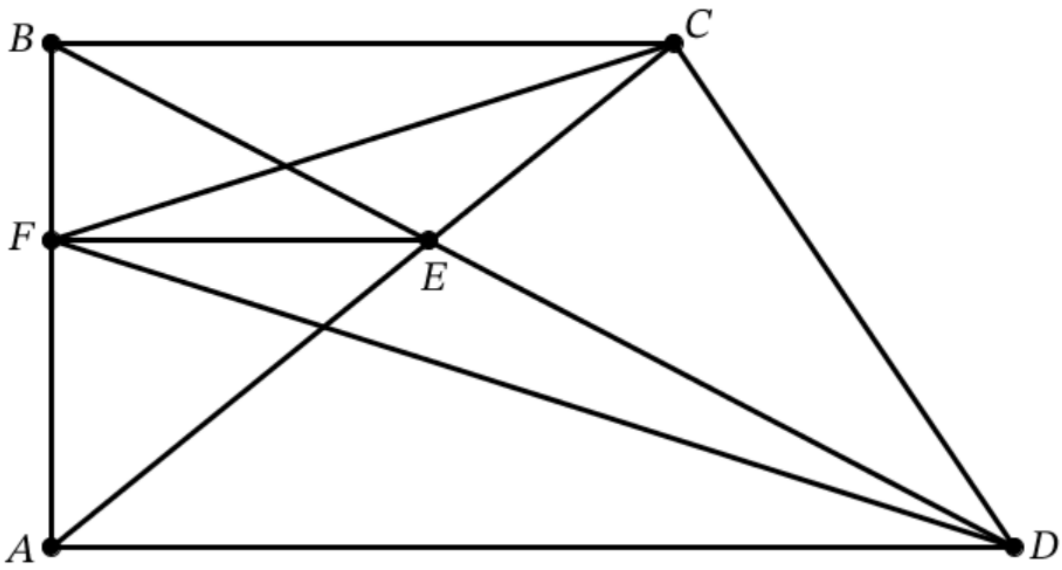
Рассмотрим всевозможные умные множества, не содержащие t. Обозначим эти множества $U_1, \ldots, U_n$. Тогда множества $U_1 \cup \{t\}, \ldots, U_n \cup \{t\}$ попарно различные и умные. Из этого следует, что $n \leqslant m$.

Аналогично докажем обратное неравенство. Рассмотрим всевозможные умные множества, содержащие t. Обозначим эти множества $V_1, \ldots, V_m$. Тогда множества $V_1 \setminus \{t\}, \ldots, V_m \setminus \{t\}$ попарно различные и умные. Из этого следует, что $m \leqslant n$.

Итак, мы доказали, что $m = n$. Поэтому общее количество умных множеств $m + n = 2n$ должно быть четным числом. Но это противоречит тому, что таких множеств 63. Доказательство от противного завершено.

3. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC угол A — прямой, E — точка пересечения диагоналей, F — основание перпендикуляра, опущенного из точки E на сторону AB. Докажите, что $\angle CFE = \angle DFE$.

Решение.



Из условия следует, что прямые AD, BC, FE параллельны между собой и перпендикулярны прямой AB.

Заметим, что по теореме Фалеса $\frac{AF}{FB} = \frac{AE}{EC}$. Из подобия треугольников ADE и BCE получаем $\frac{AE}{EC} = \frac{AD}{BC}$. Следовательно,

$$\frac{AF}{FB} = \frac{AD}{BC}.$$

Кроме того, $\angle FBC = 90^\circ = \angle FAD$. Поэтому $\triangle ADF$ и $\triangle BCF$ подобны по второму признаку. Из подобия получаем $\angle BFC = \angle AFD$. Теперь запишем:

$$\angle CFE = 90^\circ - \angle BFC = 90^\circ - \angle AFD = \angle DFE.$$

4. Докажите, что для любого натурального числа n существует натуральное число K такое, что сумма цифр K равна n и K делится на n.

Решение. Рассмотрим числа $10^1, 10^2, 10^3, \ldots, 10^{n^2+1}$. По принципу Дирихле какие-то n из них дают один и тот же остаток при делении на n. Пусть это числа $10^{r_1}, 10^{r_2}, \ldots, 10^{r_n}$. Тогда число $K = 10^{r_1} + 10^{r_2} + \ldots + 10^{r_n}$ делится на n, а в его десятичной записи встречаются только единицы и нули, при этом единиц ровно n. Нужное число построено.

5. Есть три поля. На одном лежит стопка из 2024 монет, два других свободны. За один ход можно переложить монету с верха любой стопки на свободное поле или на верх любой другой стопки. За какое наименьшее число ходов удастся собрать стопку в обратном порядке на том же поле?

Ответ: $3 \cdot 2024 - 2 = 6070$.

Решение. Покажем, как собрать стопку за 6070 ходов. Пусть изначально монеты лежат на первом поле. Первым ходом переложим монету на второе поле. Следующими 2023 ходами последовательно переложим все монеты с первого поля на третье. Затем переложим монету со второго поля на первое. Далее за 2022 хода последовательно переложим все монеты кроме одной с третьего поля на второе. Затем переложим оставшуюся монету с третьего поля на первое. И последними 2022 ходами последовательно переложим все монеты со второго поля на первое.

Непосредственно проверяется, что предъявленный алгоритм корректен.

Теперь докажем от противного, что меньшего числа ходов не хватит. Предположим, что нашелся алгоритм, работающий за $\leqslant 6069$ ходов.

Заметим, что в любом корректном алгоритме каждая монета перекладывается хотя бы два раза. Действительно, если какую-то монету мы ни разу не переложили, то мы ни разу не переложили и монету, которая изначально была нижней на первом поле. Но тогда эта монета и в конце алгоритма будет нижней, а должна быть верхней. Поэтому каждую монету мы каким-то ходом должны убрать с первого поля, и каким-то ходом вернуть на первое поле.

Рассмотрим момент времени, когда мы убрали нижнюю монету с первого поля. Мы предположили, что существует алгоритм, работающий за $\leqslant 6069 = 2024 \cdot 2 + 2021$. Так как каждая монета перекладывается не меньше двух раз, то найдутся такие три монеты, которые при таком алгоритме перекладываются ровно два раза. По принципу Дирихле какие-то две из них после первого перекладывания оказались в одном и том же столбике. Тогда в конце алгоритма их взаимное расположение не изменится. Противоречие.