Заключительный комбинаторный разнобой

1. В прямоугольнике $3 \times n$ стоят фишки трёх цветов, по n штук каждого цвета. Доказать, что можно переставить фишки в каждой строке так, чтобы в каждом столбце были фишки всех цветов.

2. Многоугольник разбит диагоналями на треугольники. Докажите, что вершины многоугольника можно покрасить в три цвета так, чтобы соседние по стороне или по диагонали вершины были разного цвета.

3. Двое бросают монетку: один бросил её 10 раз, другой — 11. Чему равна вероятность того, что у второго монета упала орлом большее число раз, чем у первого?

4. Безумный танкист (неподвижная точка плоскости) угрожает всех уничтожить, а отряд комсомольцев пытается огородить его бетонными стенами (непересекающиеся отрезки на плоскости). Снаряд танка пробивает k стен, но застревает в $(k+1)$-ой. Какое минимальное количество стен потребуется, чтобы вне зависимости от выбора танкистом направления стрельбы его снаряд застревал в одной из стен?

5. Даны два многочлена с целыми коэффициентами $P(x)$ и $Q(x)$. Оказалось, что при всех целых x значение $P(Q(x)) - x$ делится на 2024. Докажите, что при всех целых x значение $Q(P(x)) - x$ тоже делится на 2024.

6. Для произвольного многоугольника назовем его *хордой* любой отрезок, концы которого лежат на границе многоугольника, а все внутренние точки — внутри многоугольника. С многоугольником разрешается проводить операцию: разрезать его по любой хорде, и одну двух полученных частей перевернуть и приклеить обратно ко второй части по линии разреза, при условии что переворачиваемая часть и оставшаяся не накладываются. Можно ли такими операциями из квадрата получить правильный треугольник?

7. На всех черных клетках шахматной доски, кроме центрального квадрата 4×4, стоит по шашке. За ход шашка может перепрыгнуть через соседнюю (по диагонали), при этом шашка, через которую перепрыгнули, убирается. Можно ли придумать такую последовательность ходов, чтобы на доске осталась одна шашка?