Гармонический четырёхугольник

Определение. Четырёхугольник $ABCD$ называется *гармоническим*, если он вписанный и $AB \cdot CD = AD \cdot BC$.

Для вписанного четырёхугольника $ABCD$ следующие условия эквивалентны:

- $ABCD$ гармонический;
- AC — симедиана треугольника ABD.

1. Точка M — середина диагонали BD вписанного четырёхугольника $ABCD$. Докажите, что следующие условия эквивалентны тому, что четырёхугольник $ABCD$ гармонический:
(а) $\angle AMB = \angle BMC$;
(б) $\angle AMB = \angle ADC$.

2. В окружности ω проведены две параллельные хорды AB и CD. Прямая, проведённая через C и середину AB, вторично пересекает ω в точке E. Точка K — середина отрезка DE. Докажите, что $\angle AKE = \angle BKE$.

3. Точка P на дуге BC окружности (ABC), не содержащей точку A, такова, что $\angle BAM = \angle CAP$, где M — середина стороны BC. Прямая, проходящая через вершину A пересекает сторону BC в точке K, а дугу BC в точке L. Докажите, что точки K, L, M и P лежат на одной окружности.

4. Пусть P и Q — основания внутренней и внешней биссектрис угла A треугольника ABC. Докажите, что общая хорда (ABC) и (APQ) содержит симедиану треугольника ABC.

5. Высоты BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке H. Точка M — середина стороны BC, прямая MH вторично пересекает окружность ω, построенную на AH как на диаметре, в точке X. Касательная к ω в точке X пересекает прямую B_1C_1 в точке Y. Докажите, что $YH \parallel BC$.

6. Продолжение медианы AM треугольника ABC пересекает его описанную окружность в точке D. Точка E симметрична D относительно M. Докажите, что касательная в точке A к (ABC) и касательная в точке E к (EBC) пересекаются на прямой BC.

7. В треугольнике ABC проведена биссектриса AL. Точка M — середина стороны BC, прямая AM вторично пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке X. Точка P на стороне BC такова, что $LM = MP$. Выразите угол AXP через углы треугольника ABC.