Финальный алгебраический разнобой

1. Даны квадратные трёхчлены $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_{100}(x)$ с одинаковыми коэффициентами при x^2, одинаковыми коэффициентами при x, но различными свободными членами. У каждого из трёхчленов есть по два корня. У каждого трёхчлена $f_i(x)$ выбрали один корень и обозначили его через x_i. Какие значения может принимать сумма $f_2(x_1) + f_3(x_2) + \ldots + f_{100}(x_{99}) + f_1(x_{100})$?

2. Докажите, что существует бесконечное много натуральных чисел, которые кратны количеству своих делителей.

3. Положительные числа x, y, z удовлетворяют равенству $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$. Докажите, что
$$(x+1)(y+1)(z+1) \geqslant 64.$$

4. Найдите все пары простых чисел p и q, для которых найдётся натуральное число a такое, что
$$\frac{pq}{p+q} = \frac{a^2+1}{a+1}.$$

5. На доску записали 800 попарно различных натуральных чисел. Известно, что произведение любых двух чисел на доске кратно их сумме. Докажите, что ни одно из чисел не может представлять собой произведение шести различных простых чисел.

6. Пусть m и n — взаимно простые натуральные числа. Докажите, что
$$\left[\frac{m}{n}\right] + \left[\frac{2m}{n}\right] + \ldots + \left[\frac{(n-1)m}{n}\right] = \frac{(m-1)(n-1)}{2}.$$

7. Даны целые числа a, b, c, причём $c \neq b$. Известно, что квадратные трёхчлены
$$ax^2 + bx + c \quad \text{и} \quad (c-b)x^2 + (c-a)x + (a+b)$$
имеют общий корень. Докажите, что $a + b + 2c$ кратно 3.