# Побитовые суммы

*Побитовая сумма* строк $s_1, s_2, \ldots, s_k$ одинаковой длины из нулей и единиц — это строка из нулей и единиц, в $i$-том разряде которой стоит сумма $i$-ых разрядов $s_1, s_2, \ldots, s_k$ по модулю 2.

*Побитовой суммой* двух натуральных чисел называют натуральное число, двоичная запись которого является побитовой суммой двоичных записей этих чисел.

**Обозначение.** Побитовая сумма двух строк из нулей и единиц $x$ и $y$ длины $k$ обозначается как $x \oplus y$. Это же обозначение мы будем использовать для побитовой суммы натуральных чисел.

1. Для каких натуральных $x$ верно равенство $x + 1 = x \oplus 1$?

2. **(а)** Сколько существует пар чисел $(a, b)$, меньших 1024, таких, что $a \oplus b = a + b$?
   **(б)** Сколько существует чисел $n$, меньших 1000, таких, что $n \oplus 2n = 3n$?

3. Назовём набор последовательностей из 0 и 1 длины $n$ замечательным, если любые две последовательности отличаются хотя бы в $k$ разрядах. Докажите, что если есть замечательный набор из 3 последовательностей, то к нему всегда можно добавить ещё одну. (Решения, использующие перебор, не принимаются)

4. **(а)** Даны несколько натуральных чисел, побитовая сумма двоичных записей которых равна двоичной записи некоторого ненулевого числа. Докажите, что одно из чисел можно уменьшить так, чтобы побитовая сумма стала равна 0.
   **(б)** На столе лежат $n$ куч, в которых $a_1, a_2, \ldots, a_n$ камней. Двое по очереди берут любое количество камней из любой кучи. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Докажите, что у второго есть выигрышная стратегия тогда и только тогда, когда побитовая сумма чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ равна нулю.

5. Алексей выписал семь подмножеств десятиэлементного множества $M_1, M_2, \ldots M_7$. После этого Вика для каждого из 1024 подмножеств выписывает строчку по следующему правилу: подмножеству $A$ сопоставляется строка $(a_1, a_2, \ldots a_7)$, где $a_i$ — остаток при делении $|A \cap M_i|$ при делении на 2.
   **(а)** Обязательно ли любая строка длины 7 сопоставлена какому-то множеству?
   **(б)** Предположим подмножеству $A$ сопоставлена строка $s_1$, а подмножеству $B$ — $s_2$. Докажите, что какому-то подмножеству сопоставлена строка $s_1 \oplus s_2$.
   **(в)** Докажите, что есть непустое множество, которому сопоставлена строчка из нулей.

6. Есть $n$ не горящих лампочек и $k$ выключателей. Каждый выключатель соединён с некоторыми лампочками. При нажатии выключателя, все соединённые с ним лампочки меняют своё состояние (если горели, то гаснут, если не горели, то загораются). Изначально все лампочки выключены. Назовём конфигурацию лампочек достижимой, если её можно получить, нажимая на выключатели.
   **(а)** Докажите, что можно отключить несколько выключателей (возможно ни одного) так, чтобы множество достижимых конфигураций не изменилось, но любая конфигурация получалась бы ровно один раз.
   **(б)** Докажите, что количество достижимых конфигураций является степенью двойки.

7. Фокусник и ассистент показывают фокус. Ассистент даёт в распоряжение зрителя шахматную доску. Зритель может перекрасить некоторые клетки (белые в чёрные и чёрные в белые) и называет ассистенту одну из клеток. После чего ассистент перекрашивает ещё одну клетку. Затем входит фокусник. Он видит только текущее состояние доски и должен назвать клетку, которую загадал зритель. Придумайте алгоритм,позволяющий ассистенту и фокуснику осуществить задуманное.