Симедиана

Определение. *Симедианой* треугольника ABC, проведённой из вершины A, называется прямая, симметричная медиане треугольника из вершины A относительно биссектрисы из вершины A.

Пусть точки B_1 и C_1 на прямых AC и AB таковы, что прямая B_1C_1 антипараллельна BC относительно угла BAC. Тогда симедиана делит отрезок B_1C_1 пополам.

Основное свойство симедианы. Симедиана треугольника, проведённая из вершины A, проходит через точку пересечения касательных в точках B и C к (ABC).

1. Высоты BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Точка A_0 — середина стороны BC. Докажите, что точка пересечения прямых, симметричных AA_0 и HA_0 относительно биссектрис углов BAC и BHC соответственно, лежит на прямой B_1C_1.

2. Внутри треугольника ABC нашлась такая точка Q, что $\angle QBA = \angle QAC$ и $\angle ACQ = \angle BAQ$. Докажите, что Q лежит на симедиане треугольника из вершины A.

3. Дан треугольник ABC. Касательная к его описанной окружности в точке A пересекает прямую BC в точке D. Касательные к (ACD) в точках A и C пересекаются в точке K. Докажите, что прямая DK делит пополам отрезок AB.

4. Внутри равнобедренного треугольника ABC выбрана точка P такая, что $\angle PBC = \angle PCA$. Пусть M — середина основания BC. Докажите, что $\angle BPM + \angle CPA = 180°$.

5. Симедиана треугольника ABC, проведённая из вершины A, пересекает (ABC) в точке D, а сторону BC — в точке E.
   (а) Докажите, что $\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$. **(б)** Докажите, что $\frac{BE}{CE} = \frac{AB^2}{AC^2}$.

6. На сторонах AB и AC треугольника ABC вовне построены квадраты $ABPQ$ и $ACRS$. Прямые PQ и RS пересекаются в точке X. Докажите, что прямая AX содержит симедиану треугольника ABC.

7. В треугольнике ABC проведена медиана AM. Серединные перпендикуляры к сторонам AB и AC пересекают AM в точках X и Y соответственно. Прямые BX и CY пересекаются в точке Z. Докажите, что AZ — симедиана треугольника ABC.

8. Дана окружность, её хорда BC и середина A_0 меньшей дуги BC. На большей дуге BC выбирается произвольная точка A. Касательная к окружности, проведённая из точки A, пересекает касательные, проведённые из точек B и C, в точках X и Y соответственно. Прямые A_0X и A_0Y пересекают прямую BC в точках N и M соответственно. Докажите, что длина отрезка NM не зависит от выбора точки A.

9. Неравнобедренный треугольник ABC вписан в окружность ω. Касательная к этой окружности в точке A пересекает прямую BC в точке D. Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Прямые BI и CI пересекают биссектрису угла ADB в точках P и Q соответственно. Пусть M — середина отрезка PQ. Докажите, что прямая MI проходит через середину дуги BAC окружности ω.