Числобой

1. Обозначим $P(n)$ наибольший простой делитель натурального числа $n \geqslant 2$. Найдите все такие n, что

$$P(n) + [\sqrt{n}] = P(n+1) + [\sqrt{n+1}].$$

2. Докажите, что для любых 12 последовательных натуральных чисел найдётся простое число, которое является делителем ровно одного из этих 12 чисел.

3. По кругу записывают 2023 натуральных числа так, чтобы любые два соседних числа различались на их наибольший общий делитель. Найдите наибольшее натуральное N, на которое гарантированно будет делиться произведение этих 2023 чисел.

4. О натуральных числах a, m, n известно, что $an + 1$ делится на m, а $am + 1$ делится на n. Докажите, что $a > \frac{mn}{2(m+n)}$.

5. Найдите все натуральные n, для которых существует такое натуральное k, что $k^n - (k-1)^n$ — ненулевая степень тройки.

6. Найдите все такие p, при которых $(p-1)! + 1$ является степенью числа p.

7. При каких натуральных $n > 1$ существуют такие натуральные $b_1, \ldots, b_n$, не все из которых равны, что при всех натуральных k число

$$(b_1 + k)(b_2 + k) \ldots (b_n + k)$$

является степенью натурального числа, отличной от первой?

8. Несколько (конечный набор) натуральных чисел покрасили в красный цвет. Докажите, что можно покрасить ещё несколько натуральных чисел так, чтобы произведение всех красных чисел равнялось сумме их квадратов.