Антипараллельность

Пусть фиксирован угол BAC. На прямых AB и AC взяты точки B_1 и C_1 (либо обе на сторонах угла, либо обе на продолжениях сторон). Тогда прямые B_1C_1 и BC называются *антипараллельными* относительно угла BAC, если $\angle ABC = \angle AC_1B_1$.

В предыдущих обозначениях, BC антипараллельна B_1C_1 тогда и только тогда, когда B, C, B_1, C_1 лежат на одной окружности.

Замечание: Точки B_1 и C_1 могут обе совпасть с точкой A: тогда прямая B_1C_1 станет касательной к описанной окружности треугольника ABC. Таким образом, касательная к описанной окружности треугольника — антипараллель к соответствующей стороне.

Прямые, антипараллельные одной и той же прямой относительно некоторого угла, параллельны.

1. Дан вписанный четырёхугольник. Для каждой вершины рассмотрим её проекцию на диагональ, не содержащую эту вершину. Докажите, что четыре полученные точки лежат на одной окружности.

2. На стороне AB параллелограмма $ABCD$ выбрана точка K, на стороне CD — точка L, а на отрезке KL — точка M. Докажите, что вторая (отличная от M) точка пересечения окружностей (AKM) и (CLM) лежит на диагонали AC.

3. На боковой стороне AB трапеции $ABCD$ построили внутрь равносторонний треугольник, и его третья вершина попала на прямую CD. Докажите, что, если построить внутрь равносторонний треугольник на стороне CD, его третья вершина попадет на прямую AB.

4. Пусть AA_1 и BB_1 — высоты остроугольного неравнобедренного треугольника ABC, M — середина стороны AB, а касательная к описанной окружности треугольника ABC, проведенная в точке A, пересекает прямую A_1B_1 в точке X. Докажите, что A, X, A_1, M лежат на одной окружности.

5. В окружности Ω проведена хорда AB. Окружность ω касается AB в точке T и пересекает Ω в точках C и D. Прямые AC и TD пересекаются в точке E, а прямые BD и TC пересекаются в точке F. Докажите, что $EF \parallel AB$.

6. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B. Через точку B проведена прямая, вторично пересекающая окружности ω_1 и ω_2 в точках K и M соответственно. Прямая ℓ_1 касается окружности ω_1 в точке Q и параллельна прямой AM. Прямая AQ вторично пересекает окружность ω_2 в точке R. Докажите, что
   (а) Касательная ℓ_2, проведённая к окружности ω_2 в точке R, параллельна AK;
   (б) Прямые ℓ_1, ℓ_2 и KM пересекаются в одной точке.

7. На сторонах AB и BC параллелограмма $ABCD$ выбраны точки A_1 и C_1 соответственно. Отрезки AC_1 и CA_1 пересекаются в точке P. Окружности AA_1P и CC_1P вторично пересекаются в точке Q, лежащей внутри треугольника ACD. Докажите, что $\angle PDA = \angle QBA$.

8. На стороне AB треугольника ABC выбрана точка D, а на продолжении BC за точку C выбрана точка E. Оказалось, что прямая, проходящая через точку E параллельно AB, касается описанной окружности треугольника ADC. Докажите, что одна из касательных из точки E к описанной окружности треугольника BCD отсекает от угла ABE треугольник, подобный ABC.