

## Разнобой по графам

1. В компании у каждых двух людей ровно пять общих знакомых. Докажите, что количество пар знакомых делится на 3.
2. В стране некоторые пары городов соединены односторонними прямыми авиарейсами (между любыми двумя городами есть не более одного рейса). Скажем, что город  $A$  доступен для города  $B$ , если из  $B$  можно долететь в  $A$ , возможно, с пересадками. Известно, что для любых двух городов  $P$  и  $Q$  существует город  $R$ , для которого и  $P$ , и  $Q$  доступны. Докажите, что существует город, для которого доступны все города страны. (Считается, что город доступен для себя.)
3. Дан правильный 45-угольник. Можно ли так расставить в его вершинах цифры от 0 до 9 так, чтобы для любой пары различных цифр нашлась сторона, концы которой занумерованы этими цифрами?
4. В компании из 101 человека для любых 50 человек найдётся отличный от них человек, знакомый с каждым из них.  
(а) Докажите, что в этой компании есть человек, знакомый не менее чем с 75 людьми.  
(б) Докажите, что в этой компании есть человек, знающий всех.
5. Дан связный граф  $G$ , в котором  $n$  ребер. Вика хочет пронумеровать его ребра числами от 1 до  $n$ . После этого она запишет в каждую вершину наибольший общий делитель чисел на ребрах, входящих в эту вершину. Всегда ли она может добиться того, что во всех вершинах степени больше 1 будет записано число 1?
6. На окружности имеется 21 точка. Докажите, что среди дуг, имеющих концами эти точки, найдётся не меньше ста таких, угловая мера которых не превышает  $120^\circ$ .
7. В графе 3333 вершины, и для любых двух его вершин существует гамильтонов путь (то есть путь, проходящий через каждую из вершин графа ровно один раз) с концами в этих вершинах. Какое наименьшее число рёбер может быть у такого графа?
8. Петя и Вася играют в игру. Изначально дан пустой граф с  $n$  вершинами. За один ход разрешается провести одно ориентированное ребро. Запрещается проводить кратные ребра и ребро, если граф становится сильно связным. Проигрывает тот, кто не может делать ход. Кто выигрывает при правильной игре?