

Разной по графам

1. В компании у каждых двух людей ровно пять общих знакомых. Докажите, что количество пар знакомых делится на 3.
2. В стране некоторые пары городов соединены односторонними прямыми авиарейсами (между любыми двумя городами есть не более одного рейса). Скажем, что город A доступен для города B , если из B можно долететь в A , возможно, с пересадками. Известно, что для любых двух городов P и Q существует город R , для которого и P , и Q доступны. Докажите, что существует город, для которого доступны все города страны. (Считается, что город доступен для себя.)
3. В компании из 101 человека для любых 50 человек найдётся отличный от них человек, знакомый с каждым из них.
(а) Докажите, что в этой компании есть человек, знакомый не менее чем с 75 людьми.
(б) Докажите, что в этой компании есть человек, знающий всех.
4. Дан связный граф G , в котором n ребер. Вика хочет пронумеровать его ребра числами от 1 до n . После этого она запишет в каждую вершину наибольший общий делитель чисел на ребрах, входящих в эту вершину. Всегда ли она может добиться того, что во всех вершинах степени больше 1 будет записано число 1?
5. Последовательность из 247 нулей, единиц и двоек начинается с пяти нулей. Среди пятёрок подряд стоящих цифр встречаются все 243 возможные комбинации. Какими могут быть последние пять цифр последовательности?
6. На окружности имеется 21 точка. Докажите, что среди дуг, имеющих концами эти точки, найдётся не меньше ста таких, угловая мера которых не превышает 120° .
7. В графе 3333 вершины, и для любых двух его вершин существует гамильтонов путь (то есть путь, проходящий через каждую из вершин графа ровно один раз) с концами в этих вершинах. Какое наименьшее число рёбер может быть у такого графа?
8. Петя и Вася играют в игру. Изначально дан пустой граф с n вершинами. За один ход разрешается провести одно ориентированное ребро. Запрещается проводить кратные ребра и ребро, если граф становится сильно связным. Проигрывает тот, кто не может делать ход. Кто выигрывает при правильной игре?