

По мотивам ММО

1. Действительные числа a, b, c, d таковы, что

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{c}{d} + \frac{d}{c}.$$

Докажите, что произведение каких-то двух чисел из a, b, c, d равно произведению двух других.

2. Двойной факториал $n!!$ от натурального n равен произведению всех натуральных чисел не больше n , имеющих ту же чётность, что n (например, $5!! = 15$, $6!! = 48$). Решите в натуральных числах уравнение $n!! = k!$.
3. Докажите, что среди вершин выпуклого девятиугольника можно найти три, образующие тупоугольный треугольник, ни одна сторона которого не совпадает со сторонами девятиугольника.
4. Петя загадал положительную несократимую дробь $x = \frac{m}{n}$. За один ход Вася называет положительную несократимую дробь y , не превосходящую 1, и Петя в ответ сообщает Васе числитель несократимой дроби, равной сумме $x + y$. Как Васе за два хода гарантированно узнать x ?
5. В треугольнике ABC проведена высота AH . Точки M и N — середины отрезков BH и CH . Докажите, что точка пересечения перпендикуляров из точек M и N на прямые AB и AC соответственно равноудалена от точек B и C .
6. Имеется кучка из 100 камней. Двое играют в следующую игру. Первый берёт 1 камень, потом второй может взять 1 или 2 камня, потом первый может взять 1, 2 или 3 камня, затем второй 1, 2, 3 или 4 камня и так далее. Выигрывает тот, кто возьмёт последний камень. Кто может выиграть, как бы ни играл соперник?
7. На описанной окружности треугольника ABC отметили середины дуг BAC и CBA — точки M и N соответственно, и середины дуг BC и AC — точки P и Q соответственно. Окружность ω_1 касается стороны BC в точке A_1 и продолжений сторон AC и AB . Окружность ω_2 касается стороны AC в точке B_1 и продолжений сторон BA и BC . Оказалось, что A_1 лежит на отрезке NP . Докажите, что B_1 лежит на отрезке MQ .
8. На каждой из 99 карточек написано действительное число. Все 99 чисел различны, а их общая сумма иррациональна. Стопка из 99 карточек называется *неудачной*, если для каждого натурального k от 1 до 99 сумма чисел на k верхних карточках иррациональна. Петя вычислил, сколькими способами можно сложить исходные карточки в неудачную стопку. Какое наименьшее значение он мог получить?