

## Разной перед ММО

1. Все таверны в царстве принадлежат трем фирмам. В целях борьбы с монополиями царь Горох издал следующий указ: каждый день, если у некоторой фирмы оказывается более половины всех таверн и число её таверн делится на 5, то у этой фирмы остается только пятая часть её таверн, а остальные закрываются. Могло ли так случиться, что через три дня у всех фирм стало меньше таверн? (Новые таверны в это время открываться не могут.)
2. На графике функции  $f(x) = 1/x$  Миша отмечал подряд все точки с абсциссами  $1, 2, 3, \dots$ , пока не устал. Потом пришла Маша и закрасила все прямоугольники, одна из вершин которых — это отмеченная точка, еще одна — начало координат, а еще две лежат на осях. Затем учительница попросила ребят посчитать площадь фигуры, состоящей из всех точек, закрасенных ровно один раз. Сколько получилось?
3. Про трапецию  $ABCD$  с основаниями  $AD$  и  $BC$  известно, что  $AB = BD$ . Пусть точка  $M$  — середина боковой стороны  $CD$ , а  $O$  — точка пересечения отрезков  $AC$  и  $BM$ . Докажите, что треугольник  $BOC$  — равнобедренный.
4. На прямой сидят 2024 точечных кузнечика. За ход какой-нибудь из кузнечиков прыгает через какого-нибудь другого так, чтобы оказаться на прежнем расстоянии от него. Прыгая только вправо, кузнечики могут добиться того, чтобы какие-то двое из них оказались на расстоянии ровно 1 мм друг от друга. Докажите, что кузнечики могут добиться того же, прыгая из начального положения только влево.
5. Дана трапеция  $ABCD$  с основаниями  $AD$  и  $BC$ . Перпендикуляр, опущенный из точки  $A$  на сторону  $CD$ , проходит через середину диагонали  $BD$ , а перпендикуляр, опущенный из точки  $D$  на сторону  $AB$ , проходит через середину диагонали  $AC$ . Докажите, что трапеция равнобокая.
6. В турнире по гандболу участвуют 20 команд. После того как каждая команда сыграла с каждой по разу, оказалось, что количество очков у всех команд разное. После того как каждая команда сыграла с каждой по второму разу, количество очков у всех команд стало одинаковым. В гандболе за победу команда получает 2 очка, за ничью 1 очко, за поражение — 0 очков. Верно ли, что найдутся две команды, по разу выигравшие друг у друга?
7. Внутри равнобедренного треугольника  $ABC$  отмечена точка  $K$  так, что  $AB = BC = CK$  и  $\angle KAC = 30^\circ$ . Найдите угол  $AKB$ .
8. У Полины есть колода из 36 карт (4 масти по 9 карт в каждой). Она выбирает из неё половину карт, какие хочет, и отдает Василисе, а вторую половину оставляет себе. Далее каждым ходом игроки по очереди открывают по одной карте по своему выбору (соперник видит масть и достоинство открытой карты), начиная с Полины. Если в ответ на ход Полины Василиса смогла положить карту той же масти или того же достоинства, то Василиса зарабатывает одно очко. Какое наибольшее количество очков Василиса может гарантированно заработать?