

Описанные четырёхугольники

1. Точку, расположенную внутри треугольника, соединили отрезками с серединами его сторон. Образовались три выпуклых четырёхугольника, в два из которых можно вписать окружность. Докажите, что в третий четырёхугольник также можно вписать окружность.
2. Две окружности касаются внешним образом. К ним проведены общие внешние касательные и отмечены точки касания. Докажите, что эти точки являются вершинами описанного четырёхугольника.
3. В треугольник ABC вписана окружность ω с центром I . Точка B_1 на стороне AC такова, что $BC = B_1C$. Пусть J центр окружности, вписанной в треугольник ABB_1 . Докажите, что прямая, проведенная через точку J параллельно BB_1 , касается ω .
4. В треугольнике ABC отметили середины сторон AB и BC (точки C_1 и A_1 , соответственно), а также центр вписанной окружности I . Известно, что $\angle C_1IA = 90^\circ$. Докажите, что $\angle A_1IC$ также равен 90° .
5. (а) Выпуклый четырёхугольник разбит на четыре меньших четырёхугольника как показано на рисунке 1. Известно, что в каждый из полученных четырёхугольников можно вписать окружность. Докажите, что и в исходный четырёхугольник можно вписать окружность.
(б) Выпуклый четырёхугольник разбили на 9 меньших четырёхугольников как показано на рисунке 2. Известно, что в каждый из закрашенных четырёхугольников можно вписать окружность. Докажите, что и в исходный четырёхугольник можно вписать окружность.

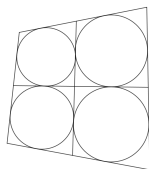


Рис. 1: к задаче 5а

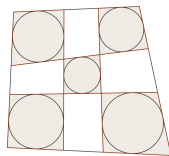


Рис. 2: к задаче 5б

6. В треугольнике ABC проведены медианы AA_1 и CC_1 , пересекающиеся в точке M . Известно, что в четырёхугольник C_1BA_1M можно вписать окружность. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.
7. На плоскости даны две окружности ω_1 и ω_2 , касающиеся внешним образом. На окружности ω_1 выбран диаметр AB , а на окружности ω_2 выбран диаметр CD . Рассмотрим всевозможные положения точек A, B, C и D , при которых $ABCD$ — выпуклый описанный четырёхугольник, и пусть I — центр его вписанной окружности. Найдите геометрическое место точек I .
8. Окружность, вписанная в четырёхугольник $ABCD$, касается его сторон AB, BC, CD, DA в точках K, L, M, N соответственно. Докажите, что точки пересечения диагоналей четырёхугольников $ABCD$ и $KLMN$ совпадают.