Некруглые скобочки

Определение. Целая часть $[x]$ числа x — это наибольшее целое число, не превосходящее x. Дробная часть $\{x\}$ числа x — это разность самого числа и его целой части ($\{x\} = x - [x]$).

1. Докажите, что для любого действительного числа x и натурального n выполнено равенство

$$[nx] = [x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \left[x + \frac{2}{n}\right] + \ldots + + \left[x + \frac{n-1}{n}\right].$$

2. Найдите все натуральные n такие, что число $\left[\frac{n^2}{5}\right]$ простое.

3. Обозначим через $Q(x)$ следующую сумму:

$$Q(x) = [x] + \left[\frac{x}{2}\right] + \ldots + \left[\frac{x}{10000}\right].$$

Найдите значение $Q(2000) - Q(1999)$.

4. Действительные числа x, y, z, t таковы, что

$$\{x + y + z\} = \{x + y + t\} = \{x + z + t\} = \{y + z + t\} = \frac{1}{4}.$$

Чему может быть равно $\{x + y + z + t\}$?

5. Существует ли действительное x такое, что $\{x\} + \left\{\frac{1}{x}\right\} = 1$?

6. Сумма дробных частей нескольких положительных чисел равна целой части их произведения. Докажите, что дробная часть суммы этих чисел равна произведению их целых частей.

7. Докажите, что для натурального n выполнено равенство

$$\left[\sqrt{n} + \sqrt{n+1}\right] = \left[\sqrt{4n+2}\right].$$

8. Докажите, что для любого натурального n число $\left[(2+\sqrt{3})^n\right]$ является нечётным.