Тренировочная олимпиада. Регион

1. Клетки доски 8×8 покрасили в один из двух цветов: красный или синий. Оказалось, что в любом трёхклеточном уголке красных клеток больше, чем синих. Найдите наибольшее возможное число синих клеток.

2. На доске написано натуральное число, большее 1. Каждую минуту его увеличивают на наибольший натуральный делитель, меньший самого числа. Верно ли, что на доске обязательно появится число, кратное 3^{2024}?

3. Три квадратных трехчлена $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ со старшими коэффициентами, равными 1, имеют по два действительных корня и удовлетворяют условиям

$$P(Q(x)) = (x-1)(x-3)(x-5)(x-7), \quad Q(R(x)) = (x-2)(x-4)(x-6)(x-8)$$

при всех действительных x. Чему может быть равно число $P(0)+Q(0)+R(0)$?

4. Дан остроугольный треугольник ABC, высоты которого пересекаются в точке H. Пусть прямая, проходящая через H параллельно AB, и прямая, проходящая через B параллельно AH, пересекаются в точке G. Точка K на прямой GH такова, что прямая AC пересекает отрезок HK в его середине. Пусть J — второе пересечение прямой AC с окружностью, описанной около треугольника CGK. Докажите, что $JK = AH$.

5. В парке есть несколько фонарей, а у сторожа в каморке несколько переключателей. При нажатии на переключатель выключенные фонари, соединенные с ним, включаются, а включенные, соединенные с ним, выключаются. Для каждого множества фонарей есть переключатель, соединенный с нечётным числом фонарей из этого множества (и, возможно, с какими-то фонарями не из этого множества). Докажите, что сторож может погасить все фонари независимо от их начального состояния.