

Рациональное и иррациональное

- (а) Докажите, что число $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ иррационально.

(б) Докажите, что число $\sqrt{3} + \sqrt[3]{5}$ иррационально.
- Числа x , y и z таковы, что все три числа $x + yz$, $y + xz$ и $z + xy$ рациональны, а $x^2 + y^2 = 1$. Докажите, что число xyz^2 также рационально.
- Найдите все x такие, при которых среди четырёх чисел $a = x - \sqrt{2}$, $b = x - \frac{1}{x}$, $c = x + \frac{1}{x}$, $d = x^2 + 2\sqrt{2}$ ровно одно не является целым.
- Пусть A — бесконечное множество действительных чисел, в котором не все числа рациональны. Докажите, что для любого $n > 1$ найдется n -элементное подмножество A , сумма элементов которого иррациональна.
- Олег нарисовал пустую таблицу 50×50 и написал сверху от каждого столбца и слева от каждой строки по числу. Оказалось, что все 100 написанных чисел различны, причём ровно 50 из них рациональные. Затем в каждую клетку таблицы он записал произведение чисел, написанных около её строки и столбца. Какое наибольшее количество произведений в этой таблице могли оказаться рациональными числами?
- Клетки таблицы 2×2023 надо заполнить числами (в каждую клетку вписать ровно одно число) по следующим правилам. В верхней строке должны стоять 2023 действительных числа, среди которых нет двух равных, а в нижней — те же 2023 числа, но в другом порядке. В каждом из 2023 столбцов должны быть записаны два различных числа, сумма которых должна быть рациональной. Какое наибольшее количество иррациональных чисел может быть в верхней строке таблицы?
- Десять попарно различных ненулевых чисел таковы, что для каждых двух из них либо сумма этих чисел, либо их произведение — рациональное число. Докажите, что квадраты всех этих чисел рациональны.
- Прямоугольник разрезан на равные прямоугольные треугольники с катетами 1 и 2 каждый. Докажите, что число треугольников чётно.