

## Учимся писать

1. Назовём непустое (конечное или бесконечное) множество  $A$ , состоящее из натуральных чисел, *полным*, если для любых натуральных  $a$  и  $b$  (не обязательно различных и не обязательно лежащих в  $A$ ) таких, что  $a + b$  лежит в  $A$ , число  $ab$  также лежит в  $A$ . Найдите все полные множества натуральных чисел.
2. Дан квадратный трехчлен  $P(x)$ . Докажите, что существуют попарно различные числа  $a$ ,  $b$  и  $c$  такие, что выполняются равенства

$$P(b + c) = P(a), \quad P(c + a) = P(b), \quad P(a + b) = P(c).$$

3. Даны две последовательности из букв А и Б, в каждой из которых по 100 букв. За одну операцию разрешается вставить в какое-то место последовательности (возможно, в начало или в конец) одну или несколько одинаковых букв или убрать из последовательности одну или несколько подряд идущих одинаковых букв. Докажите, что из первой последовательности можно получить вторую не более чем за 100 операций.
4. По кругу стоят  $n$  мальчиков и  $n$  девочек. Назовем пару из мальчика и девочки *хорошей*, если на одной из дуг между ними стоит поровну мальчиков и девочек (в частности, стоящие рядом мальчик и девочка образуют хорошую пару). Оказалось, что есть девочка, которая участвует ровно в 10 хороших парах. Докажите, что есть и мальчик, который участвует ровно в 10 хороших парах.