

Многоугольники и диагонали

Факт. Любой многоугольник можно *триангулировать*, то есть разбить на треугольники диагоналями, не имеющими общих точек, кроме вершин. Количество треугольников в любой триангуляции одно и то же.

1. Будем называть ухом треугольник триангуляции, две стороны которого совпадают со сторонами исходного многоугольника. Докажите, что в триангуляции n -угольника ($n \geq 4$) хотя бы два уха.
2. Многоугольник триангулировали. Возле каждой вершины записали число треугольников, примыкающих к этой вершине, после чего все диагонали стёрли. Можно ли по оставшимся возле вершин числам восстановить стёртые диагонали?
3. Докажите, что в триангуляции правильного 1001-угольника хотя бы один треугольник остроугольный.
4. Выпуклый многоугольник разрезан непересекающимися диагоналями на равнобедренные треугольники. Докажите, что в этом многоугольнике найдутся две равные стороны.
5. Сколько существует триангуляций выпуклого n -угольника, в которых нет треугольника, все три стороны которого — это диагонали исходного n -угольника?
6. На доске нарисован выпуклый 1001-угольник. Петя последовательно проводит в нём диагонали так, чтобы каждая вновь проведённая диагональ пересекала по внутренним точкам не более одной из проведённых ранее диагоналей. Какое наибольшее количество диагоналей может провести Петя?
7. Выпуклый многоугольник триангулирован. Назовём *флипом* следующую операцию: в четырёхугольнике, все стороны которого являются сторонами многоугольника или диагоналями триангуляции, одна диагональ меняется на другую. Докажите, что флипами из любой триангуляции можно получить любую другую.
8. (а) Докажите, что у выпуклого многоугольника не более 3 острых углов.
(б) Докажите, что выпуклый многоугольник может быть разрезан непересекающимися диагоналями на остроугольные треугольники не более, чем одним способом.