Дистанционный отбор

Задача 1.1. У Алексея есть три коробки, в каждой коробке по 50 шариков. В первой коробке все шарики серые, во второй — бурые, в третьей — малиновые. Алексей хочет взять из коробок 80 шариков. Сколькими способами он может это сделать? (Например, он может выбрать 20 серых, 30 бурых и 30 малиновых шариков; или 39 серых и 41 малиновых, а бурые вообще не брать).

Ответ: 1926

Решение. Для начала рассмотрим ситуацию, при которой количество шариков в каждой коробке бесконечно. По методу шаров и перегородок получаем, что в таком случае существует C_{80+3-1}^{3-1} способов выбрать 80 шариков из 3 коробок. Но не все из этих способов подходят для исходной задачи. А именно, не подходят те случаи, когда из какой-то коробки мы взяли $\geqslant$ 51 шариков. Посчитаем количество таких "лишних" случаев. Выберем произвольно 29 шариков из трех коробок. Аналогично предыдущему рассуждению это можно сделать C_{29+3-1}^{3-1} способами. К каждому полученному выбору добавим либо 51 шарик из первой коробки, либо 51 шарик из второй коробки, либо 51 шарик из третьей коробки. Легко понять, что мы получили все лишние случаи, при этом каждый посчитан один раз. Поэтому ответом в задаче является число $C_{82}^2 - 3 \cdot C_{31}^2 = 1926$.

□

Вариант 1.2. У Алексея есть три коробки, в каждой коробке по 60 шариков. В первой коробке все шарики серые, во второй — бурые, в третьей — малиновые. Алексей хочет взять из коробок 80 шариков. Сколькими способами он может это сделать? (Например, он может выбрать 20 серых, 30 бурых и 30 малиновых шариков; или 39 серых и 41 малиновых, а бурые вообще не брать).

Ответ: 2691

Вариант 1.3. У Алексея есть три коробки, в каждой коробке по 50 шариков. В первой коробке все шарики серые, во второй — бурые, в третьей — малиновые. Алексей хочет взять из коробок 90 шариков. Сколькими способами он может это сделать? (Например, он может выбрать 20 серых, 30 бурых и 40 малиновых шариков; или 49 серых и 41 малиновых, а бурые вообще не брать).

Ответ: 1726

Вариант 1.4. У Алексея есть три коробки, в каждой коробке по 60 шариков. В первой коробке все шарики серые, во второй — бурые, в третьей — малиновые. Алексей хочет взять из коробок 90 шариков. Сколькими способами он может это сделать? (Например, он может выбрать 20 серых, 30 бурых и 40 малиновых шариков; или 49 серых и 41 малиновых, а бурые вообще не брать).

Ответ: 2791

Задача 2.1. Обозначим через $Q(x)$ следующую сумму:

$$Q(x) = [x] + \left[\frac{x}{2}\right] + \ldots + \left[\frac{x}{10000}\right].$$

Найдите значение $Q(2000) - Q(1999)$. ($[y]$ — целая часть y, то есть наибольшее целое число, не превосходящее y).

Ответ: 20

Решение. Вычислим разность $\left[\frac{x}{n}\right] - \left[\frac{x-1}{n}\right]$. Пусть $x = nk + r$, $0 \leqslant r < n$, то есть k — неполное частное, а r — остаток от деления x на n. Рассмотрим случай $r \neq 0$. В этом случае $x - 1 = nk + (r-1)$, $0 \leqslant r - 1 < n$. Поэтому k — неполное частное, а $r - 1$ — остаток от деления $x - 1$ на n. Получаем:

$$\left[\frac{x}{n}\right] - \left[\frac{x-1}{n}\right] = \left[k + \frac{r}{n}\right] - \left[k + \frac{r-1}{n}\right] = k - k = 0.$$

Теперь рассмотрим случай $r = 0$. Получаем:

$$\left[\frac{x}{n}\right] - \left[\frac{x-1}{n}\right] = [k] - \left[(k-1) + \frac{n-1}{n}\right] = k - (k-1) = 1.$$

Из наших рассуждений следует, что разность между $Q(x)$ и $Q(x-1)$ равна количеству делителей числа x.

Как известно, если $x = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_l^{\alpha_l}$, где $p_1, p_2, \ldots, p_l$ — попарно различные простые числа, то у числа x ровно $(p_1 + 1)(p_2 + 1) \ldots (p_l + 1)$ различных делителей. Поэтому, так как $2000 = 2^4 \cdot 5^3$, то ответ на вопрос задачи $(4 + 1) \cdot (3 + 1) = 20$. $\square$

Вариант 2.2. Обозначим через $Q(x)$ следующую сумму:

$$Q(x) = [x] + \left[\frac{x}{2}\right] + \ldots + \left[\frac{x}{10000}\right].$$

Найдите значение $Q(3000) - Q(2999)$. ($[y]$ — целая часть y, то есть наибольшее целое число, не превосходящее y).

Ответ: 32

Вариант 2.3. Обозначим через $Q(x)$ следующую сумму:

$$Q(x) = [x] + \left[\frac{x}{2}\right] + \ldots + \left[\frac{x}{10000}\right].$$

Найдите значение $Q(4000) - Q(3999)$. ($[y]$ — целая часть y, то есть наибольшее целое число, не превосходящее y).

Ответ: 24

Вариант 2.4. Обозначим через $Q(x)$ следующую сумму:

$$Q(x) = [x] + \left[\frac{x}{2}\right] + \ldots + \left[\frac{x}{10000}\right].$$

Найдите значение $Q(6000) - Q(5999)$. ($[y]$ — целая часть y, то есть наибольшее целое число, не превосходящее y).

Ответ: 40

Задача 3.1. Найдите наименьшее натуральное n, при котором число $400000 \cdot 400002 \cdot 400006 \cdot 400008 + n$ является квадратом натурального числа.

Ответ: 36

Решение. Пусть $x = 400004$. Заметим, что

$$(x-4)(x-2)(x+2)(x+4) = (x^2-4)(x^2-16) = ((x^2-10)+6)((x^2-10)-6) = (x^2-10)^2 - 36.$$

Поэтому при $n = 36$ число из условия является полным квадратом.

Докажем, что меньшие натуральные n не подходят. Введем обозначения:

$$N = (x-4)(x-2)(x+2)(x+4), \quad m = x^2 - 10.$$

Тогда $N + 36 = m^2$. Наибольшее число, являющееся полным квадратом и меньшее $N + 36$ — это $(m-1)^2$. Но $m^2 - (m-1)^2 = 2m - 1 > 36$, поэтому среди чисел $N+1, N+2, \ldots, N+35$ нет ни одного полного квадрата.

□

Вариант 3.2. Найдите наименьшее натуральное n, при котором число $300000 \cdot 300002 \cdot 300006 \cdot 300008 + n$ является квадратом натурального числа.

Ответ: 36

Вариант 3.3. Найдите наименьшее натуральное n, при котором число $200000 \cdot 200002 \cdot 200006 \cdot 200008 + n$ является квадратом натурального числа.

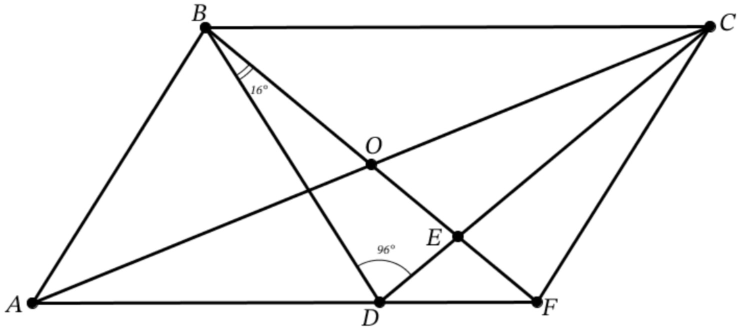
Ответ: 36

Вариант 3.4. Найдите наименьшее натуральное n, при котором число $100000 \cdot 100002 \cdot 100006 \cdot 100008 + n$ является квадратом натурального числа.

Ответ: 36

Задача 4.1. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC, в которой $AB = BD$. Прямая, проходящая через точку B и середину диагонали AC, пересекает сторону CD в точке E. Известно, что $\angle DBE = 16°$, $\angle BDC = 96°$. Найдите $\angle BAD$. Ответ выразите в градусах.

Ответ: $50°$.



Решение. Пусть F — точка пересечения прямых BE и AD, а O — середина AC. Тогда $AO = OC$ по условию, $\angle BOC = \angle AOF$ как вертикальные, а $\angle BCO = \angle OAF$ как накрест лежащие при параллельных прямых AD и BC. Поэтому $\triangle BOC = \triangle AOF$, и $BC = AF$. Следовательно, четырехугольник $ABCF$ параллелограмм. Из равенства $CF = AB = BD$ получаем, что $DBCF$ равнобедренная трапеция. Из этого следует, что $\angle EDF = \angle EFD$ и по сумме углов треугольника BDF получаем $\angle EDF = (180° - 16° - 96°)/2 = 34°$. Поэтому $\angle BAD = \angle ADB = 180° - \angle BDC - \angle EDF = 50°$. □

Вариант 4.2. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC, в которой $AB = BD$. Прямая, проходящая через точку B и середину диагонали AC, пересекает сторону CD в точке E. Известно, что $\angle DBE = 21°$, $\angle BDC = 93°$. Найдите $\angle BAD$. Ответ выразите в градусах.

Ответ: $54°$.

Вариант 4.3. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC, в которой $AB = BD$. Прямая, проходящая через точку B и середину диагонали AC, пересекает сторону CD в точке E. Известно, что $\angle DBE = 23°$, $\angle BDC = 107°$. Найдите $\angle BAD$. Ответ выразите в градусах.

Ответ: $48°$.

Вариант 4.4. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC, в которой $AB = BD$. Прямая, проходящая через точку B и середину диагонали AC, пересекает сторону CD в точке E. Известно, что $\angle DBE = 17°$, $\angle BDC = 103°$. Найдите $\angle BAD$. Ответ выразите в градусах.

Ответ: $47°$.

Задача 5.1. Пусть $n = 2^{2023} - 2023^2$. Найдите последнюю цифру числа $2^n - n^2$.

Ответ: 7

Решение. Найдем остаток числа 2^n при делении на 10. Заметим, что остатки степеней двойки порождают цикл длины 4: $2, 4, 8, 6, 2 \dots$. Таким образом, чтобы найти искомый остаток, нужно найти остаток числа n при делении на 4.

$$n = 2^{2023} - 2023^2 \equiv 0 - 1 \equiv 3 \pmod 4.$$

Следовательно, $2^n \equiv 2^3 = 8 \pmod{10}$.

Теперь найдем остаток n^2 при делении на 10. Так как $2023 \equiv 3 \pmod 4$, то

$$2^{2023} \equiv 2^3 = 8 \pmod{10}.$$

Поэтому $n^2 \equiv (8 - 3^2)^2 \equiv 1 \pmod{10}$.

Получаем, что $2^n - n^2 \equiv 8 - 1 = 7 \pmod{10}$, то есть последняя цифра равна 7.

□

Вариант 5.2. Пусть $n = 2^{2021} - 2021^2$. Найдите последнюю цифру числа $2^n - n^2$.

Ответ: 7

Вариант 5.3. Пусть $n = 2^{2025} - 2025^2$. Найдите последнюю цифру числа $2^n - n^2$.

Ответ: 9

Вариант 5.4. Пусть $n = 2^{2027} - 2027^2$. Найдите последнюю цифру числа $2^n - n^2$.

Ответ: 7

Задача 6.1. Множество натуральных чисел будем называть *треугольным*, если в нём можно выбрать три различных числа, являющихся длинами сторон невырожденного треугольника. Игорь заметил, что в множестве $S = \{3, 4, \dots, n\}$ все 11-элементные подмножества треугольные. Найдите наибольшее возможное значение n. (Множество S состоит из всех натуральных чисел от 3 до n).

Ответ: 321

Решение. Пусть $n \geqslant 322$. Тогда рассмотрим последовательность чисел

$$3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322.$$

В ней каждое следующее число равно сумме двух предыдущих. Легко видеть, что 11-элементное множество, состоящее из чисел этой последовательности, не является треугольным.

Далее докажем, что при $n = 321$ любое 11 - элементное множество будет треугольным. Действительно, пусть некоторое множество $\{a_1, a_2, a_3 \dots a_{11}\}$ не является треугольным (для удобства, будем считать, что числа расположены по возрастанию). Тогда $a_3 \geqslant a_1 + a_2$, $a_4 \geqslant a_2 + a_3$, … , $a_{11} \geqslant a_9 + a_{10}$. Так как $a_1 \geqslant 3$, $a_2 \geqslant 4$, то $a_3 \geqslant 7$, $a_4 \geqslant 11$, …, $a_{11} \geqslant 322$. Противоречие. Значит, $n = 321$ подходит. □

Вариант 6.2. Множество натуральных чисел будем называть *треугольным*, если в нём можно выбрать три различных числа, являющихся длинами сторон невырожденного треугольника. Игорь заметил, что в множестве $S = \{4, 5, \dots, n\}$ все 10-элементные подмножества треугольные. Найдите наибольшее возможное значение n. (Множество S состоит из всех натуральных чисел от 4 до n).

Ответ: 253

Вариант 6.3. Множество натуральных чисел будем называть *треугольным*, если в нём можно выбрать три различных числа, являющихся длинами сторон невырожденного треугольника. Игорь заметил, что в множестве $S = \{4, 5, \dots, n\}$ все 11-элементные подмножества треугольные. Найдите наибольшее возможное значение n. (Множество S состоит из всех натуральных чисел от 4 до n).

Ответ: 410

Вариант 6.4. Множество натуральных чисел будем называть *треугольным*, если в нём можно выбрать три различных числа, являющихся длинами сторон невырожденного треугольника. Игорь заметил, что в множестве $S = \{3, 4, \dots, n\}$ все 10-элементные подмножества треугольные. Найдите наибольшее возможное значение n. (Множество S состоит из всех натуральных чисел от 3 до n).

Ответ: 198

Задача 7.1. У Игоря есть несколько карточек, на каждой написано действительное число. Среднее арифметическое чисел на карточках Игоря равно s. У Ивана есть карточка с числом 1. Он посчитал, что среднее арифметическое чисел на его с Игорем карточках равно $s - 13$. У Сергея есть карточка с числом 2001. Он посчитал, что среднее арифметическое чисел на его с Игорем карточках равно $s + 27$. Найдите s.

Ответ: 651

Решение. Пусть x — сумма чисел на карточках и Игоря, а n — их количество. Тогда имеем

$$\begin{cases} \dfrac{x}{n} = s, \\[2ex] \dfrac{x+1}{n+1} = s - 13, \\[2ex] \dfrac{x+2001}{n+1} = s + 27. \end{cases}$$

Вычитая из третьей строчки вторую, получим $\frac{2000}{n+1} = 40$. Значит, $n = 49$.

Подставляя первую строчку во вторую, получим $\frac{49s+1}{50} = s - 13$. Значит, $s = 651$. $\square$

Вариант 7.2. У Игоря есть несколько карточек, на каждой написано действительное число. Среднее арифметическое чисел на карточках Игоря равно s. У Ивана есть карточка с числом 1. Он посчитал, что среднее арифметическое чисел на его с Игорем карточках равно $s-12$. У Сергея есть карточка с числом 1801. Он посчитал, что среднее арифметическое чисел на его с Игорем карточках равно $s+18$. Найдите s.

Ответ: 721

Вариант 7.3. У Игоря есть несколько карточек, на каждой написано действительное число. Среднее арифметическое чисел на карточках Игоря равно s. У Ивана есть карточка с числом 1. Он посчитал, что среднее арифметическое чисел на его с Игорем карточках равно $s-20$. У Сергея есть карточка с числом 2401. Он посчитал, что среднее арифметическое чисел на его с Игорем карточках равно $s+40$. Найдите s.

Ответ: 801

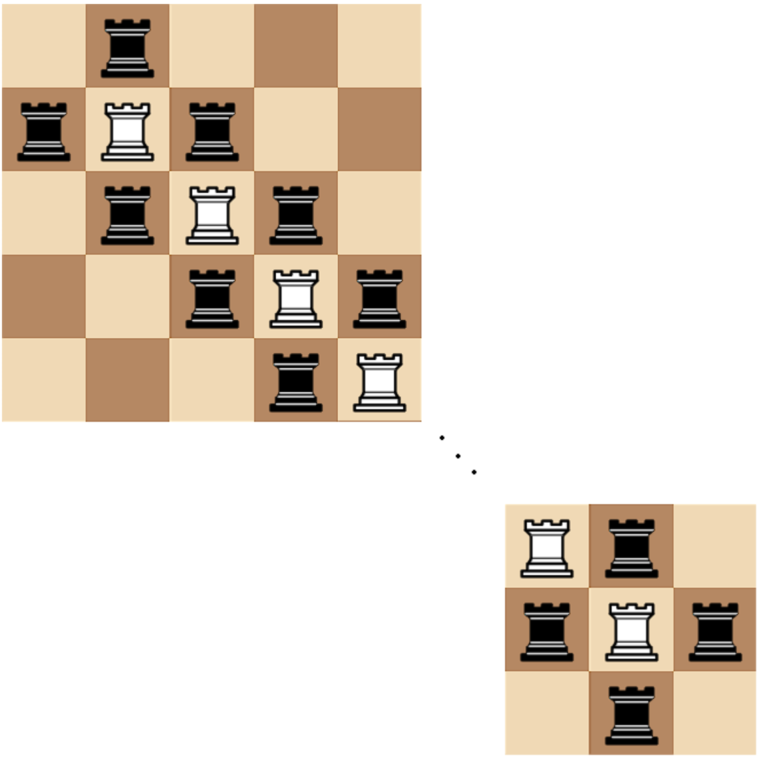
Вариант 7.4. У Игоря есть несколько карточек, на каждой написано действительное число. Среднее арифметическое чисел на карточках Игоря равно s. У Ивана есть карточка с числом 1. Он посчитал, что среднее арифметическое чисел на его с Игорем карточках равно $s-21$. У Сергея есть карточка с числом 1601. Он посчитал, что среднее арифметическое чисел на его с Игорем карточках равно $s+19$. Найдите s.

Ответ: 841

Задача 8.1. На доске 400×400 стоит 398 белых ладей и несколько чёрных ладей. Оказалось, что нет пары одноцветных ладей, бьющих друг друга. Какое наибольшее количество чёрных ладей могло оказаться на доске? (Две ладьи A и B бьют друг друга, если они стоят в клетках одной вертикали или горизонтали и между A и B нет других ладей).

Ответ: 798

Решение. Приведем пример (один из многих возможных), когда на доске удается разместить 798 черных ладей. Пронумеруем горизонтали числами от 1 до 400 сверху вниз, а вертикали — числами от 1 до 400 слева направо. Будем называть клетку на пересечении i-й горизонтали и j-й вертикали клеткой (i, j). Поставим белые ладьи в такие клетки (i, j), для которых $i = j \in \{2, 3, 4, \ldots, 398, 399\}$ (то есть во все клетки главной диагонали кроме угловых). Поставим черные ладьи в такие клетки (i, j), для которых $|i - j| = 1$ (то есть во все клетки, соседние с клетками главной диагонали). (см. рис.)



Нетрудно убедиться, что одноцветные ладьи не бьют друг друга и черных ладей ровно 798.

Теперь докажем, что расположить на доске большее количество черных ладей не получится. Рассмотрим произвольную расстановку ладей, удовлетворяющую условию. Обозначим за B общее количество черных ладей в нашей расстановке, за w_i — количество белых ладей в i-й строке, а за b_i — количество черных ладей в i-й строке. Заметим, что в каждой строке цвета ладей должны чередоваться, поэтому $b_i \leqslant w_i + 1$. Следовательно

$$B = \sum_{i=1}^{400} b_i \leqslant \sum_{i=1}^{400} (w_i + 1) = \sum_{i=1}^{400} w_i + 400 = 798.$$

Желаемая оценка доказана. □

Вариант 8.2. На доске 300×300 стоит 298 белых ладей и несколько чёрных ладей. Оказалось, что нет пары одноцветных ладей, бьющих друг друга. Какое наибольшее количество чёрных ладей могло оказаться на доске? (Две ладьи A и B бьют друг друга, если они стоят в клетках одной вертикали или горизонтали и между A и B нет других ладей).

Ответ: 598

Вариант 8.3. На доске 200×200 стоит 198 белых ладей и несколько чёрных ладей. Оказалось, что нет пары одноцветных ладей, бьющих друг друга. Какое наибольшее количество чёрных ладей могло оказаться на доске? (Две ладьи A и B бьют друг друга, если они стоят в клетках одной вертикали или горизонтали и между A и B нет других ладей).

Ответ: 398

Вариант 8.4. На доске 100×100 стоит 98 белых ладей и несколько чёрных ладей. Оказалось, что нет пары одноцветных ладей, бьющих друг друга. Какое наибольшее количество чёрных ладей могло оказаться на доске? (Две ладьи A и B бьют друг друга, если они стоят в клетках одной вертикали или горизонтали и между A и B нет других ладей).

Ответ: 198

Задача 9.1. Пусть $MNKP$ — прямоугольник со сторонами $MN = 30$, $NK = 6$. На стороне KP выбрали точку L. Обозначим через X, Y, Z точки пересечения медиан треугольников MNL, NKL, PML соответственно. Чему равна площадь треугольника XYZ?

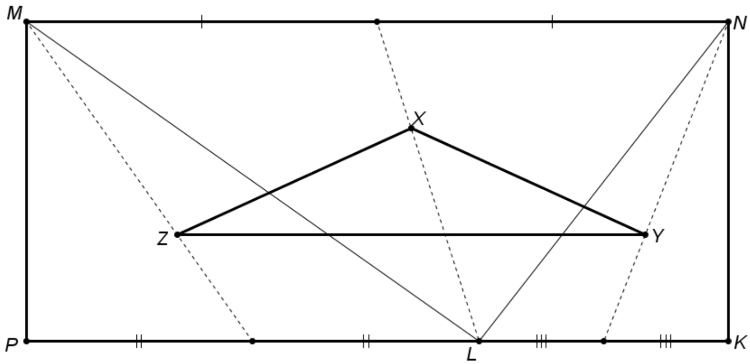
Ответ: 20

Решение. Будем обозначать расстояние от точки A до прямой BC как $\rho(A, BC)$.

В решении мы будем использовать следующий факт: для произвольного треугольника ABC с точкой пересечения медиан M выполнено равенство

$$\rho(M, BC) = \frac{1}{3}\rho(A, BC).$$

Приступим к решению нашей задачи.



Заметим, что

$$\rho(Z, PK) = \frac{1}{3}NK = \rho(Y, PK) \quad \Rightarrow \quad ZY \parallel PK.$$

Кроме того,

$$\rho(Z, MP) + \rho(Y, NK) = \frac{1}{3}(PL + LK) = \frac{1}{3}MN \quad \Rightarrow \quad ZY = \frac{2}{3}MN.$$

Теперь найдем длину высоты в $\triangle XYZ$:

$$\rho(X, ZY) = NK - \rho(X, MN) - \rho(Z, PK) = NK - \frac{1}{3}NK - \frac{1}{3}NK = \frac{1}{3}NK.$$

Осталось заметить, что

$$S_{\triangle XYZ} = \frac{1}{2} \cdot ZY \cdot \rho(X, ZY) = \frac{1}{9} \cdot MN \cdot NK = 20.$$

□

Вариант 9.2. Пусть $MNKP$ — прямоугольник со сторонами $MN = 30$, $NK = 12$. На стороне KP выбрали точку L. Обозначим через X, Y, Z точки пересечения медиан треугольников MNL, NKL, PML соответственно. Чему равна площадь треугольника XYZ?

Ответ: 40

Вариант 9.3. Пусть $MNKP$ — прямоугольник со сторонами $MN = 36, NK = 4$. На стороне KP выбрали точку L. Обозначим через X, Y, Z точки пересечения медиан треугольников MNL, NKL, PML соответственно. Чему равна площадь треугольника XYZ?

Ответ: 16

Вариант 9.4. Пусть $MNKP$ — прямоугольник со сторонами $MN = 28, NK = 9$. На стороне KP выбрали точку L. Обозначим через X, Y, Z точки пересечения медиан треугольников MNL, NKL, PML соответственно. Чему равна площадь треугольника XYZ?

Ответ: 28

Задача 10.1. Ваня выписал на доску все натуральные числа, не превосходящие 200 и взаимно простые с 100. Затем Сережа посчитал сумму этих чисел. Какое число получилось у Сережи?

Ответ: 8000

Решение. Для начала заметим, что число взаимно просто с 200 тогда и только тогда, когда оно взаимно просто с 100. Поэтому достаточно найти сумму чисел, не превосходящих 200 и взаимно простых с 200. Заметим, что количество таких чисел равно $\varphi(200) = 80$. (Здесь φ — функция Эйлера). Также заметим, что число k взаимно просто с 200 тогда и только тогда, когда $200 - k$ взаимно просто с 200. Поэтому наши 80 взаимно простых с 200 чисел можно разбить на 40 пар так, что сумма чисел в каждой паре равна 200. (Число 100, у которого могло бы не быть пары, очевидно, не взаимно просто с 200). Следовательно искомая сумма равна $40 \cdot 200 = 8000$. □

Вариант 10.2. Ваня выписал на доску все натуральные числа, не превосходящие 400 и взаимно простые с 100. Затем Сережа посчитал сумму этих чисел. Какое число получилось у Сережи?

Ответ: 32000

Задача 11.1. Дана таблица 4×4. Вика хочет поставить в каждую клетку этой таблицы 1 или -1. При этом она хочет, чтобы сумма чисел в каждой строке и в каждом столбце равнялась 0. Сколькими способами она может это сделать?

Ответ: 90

Решение. В начале сделаем очевидное замечание: сумма чисел в строке (или столбце) равна 0 тогда и только тогда, когда в ней (или в нем) две единички две минус единички. Нам будет удобнее следить за выполнением этого условия.

Пусть есть какая-то удовлетворяющая условию расстановка чисел. Поставим точку в центр каждой клеточки с единичкой. После этого соединим отрезками точки, стоящие в одном столбце или в одной строке. Тогда из каждой точки выходит ровно два отрезка: один горизонтальный и один вертикальный. Это означает, что наши точки и отрезки образуют один или несколько циклов. При этом в каждом цикле горизонтальные и вертикальные отрезки чередуются, поэтому в каждом цикле количество горизонтальных отрезков равно количеству вертикальных. Следовательно, каждый цикл имеет четную длину. Из того, что сумма длин всех циклов равна 8, а циклы длины 2 невозможны, следует, что либо имеется один цикл длины 8, либо два цикла длины 4.

Назовем столбцы таблицы буквами a, b, c, d, а строки — числами $1, 2, 3, 4$. Посчитаем количество способов расставить единички по циклу длины 8 так, что одна из единиц стоит в клетке $a1$.

- Выберем вторую (кроме $a1$) клетку для единицы в первом столбце. Это можно сделать тремя способами. Пусть мы выбрали клетку ai, $i \in \{2, 3, 4\}$.

- Теперь выберем вторую (кроме ai) клетку в i-й строке. Это можно сделать снова тремя способами. Пусть мы выбрали клетку xi, $x \in \{b, c, d\}$.

- Теперь выберем вторую клетку в столбце x. Это можно сделать двумя способами: нельзя выбирать xi, так как она уже выбрана, и нельзя выбирать $x1$, так как тогда мы получили бы цикл длины 4, а не 8. Пусть мы выбрали клетку xj, где $j \in \{2, 3, 4\} \setminus \{i\}$.

- Теперь выберем вторую клетку в j-й строке. Это можно сделать снова двумя способами, ведь клетка xj уже выбрана а aj выбирать нельзя, так как в столбце a мы уже выбрали две клетки. Пусть мы выбрали клетку yj, $y \in \{b, c, d\} \setminus \{x\}$.

- Теперь выберем вторую клетку в столбце y. Это можно сделать единственным способом, ведь yj уже выбрана, в строке i уже выбраны две клетки, а если выбрать клетку $y1$, то получим цикл длины 6. Пусть оставшаяся клетка (кроме $y1, yi, yj$) — это клетка yk.

- Теперь выберем вторую клетку в строке k. Это можно сделать единственным способом, ведь yk уже выбрана, а в столбцах a и x уже выбраны по две клетки. Пусть оставшаяся клетка (кроме ak, xk, yk) — это клетка zk.

- Выберем восьмую клетку. Она замыкает цикл, поэтому это может быть только клетка $z1$.

Итого мы нашли $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 36$ способов расставить единички по циклу длины 8 так, что одна из единиц стоит в клетке $a1$.

Теперь посчитаем количество способов расставить единички по двум циклам длины 4 так, что одна из единиц стоит в клетке $a1$.

- Выберем вторую (кроме $a1$) клетку для единицы в первом столбце. Это можно сделать тремя способами. Пусть мы выбрали клетку ai, $i \in \{2, 3, 4\}$.

- Теперь выберем вторую (кроме ai) клетку в i-й строке. Это можно сделать снова тремя способами. Пусть мы выбрали клетку xi, $x \in \{b, c, d\}$.
- Теперь выберем вторую клетку в столбце x. Это четвертая и последняя клетка в цикле, поэтому это $x1$.
- Оставшиеся четыре клетки не могут стоять в столбцах a, x и строках $1, i$. Но таких клеток всего 4, поэтому мы должны выбрать именно их.

Итого мы нашли $3 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1 = 9$ способов расставить единички по двум циклам длины 4 так, что одна из единиц стоит в клетке $a1$.

Осталось посчитать количество способов расставить числа в таблицу так, что одна из минус единиц стоит в клетке $a1$. Для этого достаточно провести полностью аналогичные рассуждения для циклов, образуемых минус единичками. Поэтому таких способов тоже $36 + 9$, а общее число способов $(36 + 9) \cdot 2 = 90$.

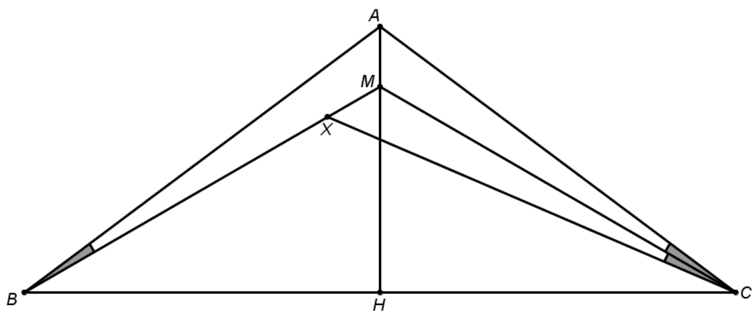
Окончательно получаем, $45 + 45 = 90$ способов расстановки чисел. □

Вариант 11.2. Дана таблица 4×4. Вика хочет поставить в каждую клетку этой таблицы 1 или 2. При этом она хочет, чтобы произведение чисел в каждой строке и в каждом столбце равнялось 4. Сколькими способами она может это сделать?

Ответ: 90

Задача 12.1. В треугольнике ABC $\angle B = \angle C = 37°$. Внутри треугольника взята точка X такая, что $\angle XBC = 30°$ и $\angle XCB = 23°$. Найдите $\angle AXC$. Ответ выразите в градусах.

Ответ: 83



Решение. Пусть прямая BX пересекает высоту AH треугольника ABC в точке M. Тогда $\triangle BMC$ равнобедренный и $\angle MCB = \angle MBC = 30°$. Значит, $\angle MCX = 30° - 23° = 7°$ и $\angle MCA = \angle BCA - \angle MCB = 37° - 30° = 7°$.

Теперь заметим, что $\angle BMC = 180° - \angle MBC - \angle MCB = 120°$. Так как $2\angle BMH = \angle BMC$, то $\angle AMB = 180° - \angle BMH = 120°$. Следовательно, $\angle BMC = \angle AMC = \angle BMA = 120°$. Поэтому $\triangle MCX = \triangle MCA$ по второму признаку равенства треугольников и, следовательно, $\triangle AXC$ равнобедренный. Поэтому по сумме углов треугольника AXC имеем $\angle AXC = \frac{1}{2}(180° - \angle ACX) = 83°$. $\square$

Вариант 12.2. В треугольнике ABC $\angle B = \angle C = 32°$. Внутри треугольника взята точка X такая, что $\angle XBC = 30°$ и $\angle XCB = 28°$. Найдите $\angle AXC$. Ответ выразите в градусах.

Ответ: 88

Вариант 12.3. В треугольнике ABC $\angle B = \angle C = 38°$. Внутри треугольника взята точка X такая, что $\angle XBC = 30°$ и $\angle XCB = 22°$. Найдите $\angle AXC$. Ответ выразите в градусах.

Ответ: 82

Вариант 12.4. В треугольнике ABC $\angle B = \angle C = 44°$. Внутри треугольника взята точка X такая, что $\angle XBC = 30°$ и $\angle XCB = 16°$. Найдите $\angle AXC$. Ответ выразите в градусах.

Ответ: 76