Декабрьская программа в «Сириусе», ключевые теория и задачи

Ниже представлены теория и задачи со сборов, которые мы считаем самыми важными. Тем, кто не был на сборах, рекомендуется самостоятельно изучить их для полноценной дальнейшей работы на кружке. Полные материалы сборов выложены на странице кружка.

Теория

Алгебра

1. Неравенства средних, доказательство для 2, 3, 4 переменных.

Геометрия

1. Про четырехугольник $ABCD$ известно, что $\angle ABD = \angle CBD$, $AD = CD$. Тогда $ABCD$ — либо дельтоид, либо вписанный.
2. Отражение ортоцентра относительно стороны и середины стороны. Расстояние от вершины до ортоцентра вдвое больше, чем расстояние от центра описанной окружности до соответствующей стороны. Окружность Эйлера.
3. Лемма о трезубце, внешняя лемма о трезубце.
4. Метрические критерии вписанности и касания.

Комбинаторика

1. Ориентированные графы. Компонента сильной связности, структура связного, но не сильно связного графа.
2. Турниры. Существование гамильтонова пути, существование гамильтонова цикла в сильно связном турнире.
3. Существование n-угольника с вершинами в данных n точках общего положения. Два доказательства: через процесс уменьшения длины, через упорядочивание.
4. Выпуклость. Три эквивалентных определения выпуклого многоугольника. Выпуклая оболочка, доказательство её существования.

Задачи

Алгебра

1. Длины сторон многоугольника равны a_1, a_2, ..., a_n. Квадратный трёхчлен $f(x)$ таков, что
$$f(a_1) = f(a_2 + a_3 + \ldots + a_n).$$
Докажите, что если A — сумма длин нескольких сторон этого многоугольника, а B — сумма длин оставшихся, то $f(A) = f(B)$.

2. Можно ли выбрать 100 последовательных чётных чисел и разбить их на пары (a_1, b_1), (a_2, b_2), ..., (a_{50}, b_{50}) так, чтобы каждый из 50 трёхчленов
$$x^2 + a_1x + b_1,\ x^2 + a_2x + b_2,\ \ldots,\ x^2 + a_{50}x + b_{50}$$
имел целые корни?

3. Даны три квадратных трёхчлена с попарно различными старшими коэффициентами, графики любых двух из которых имеют ровно одну общую точку. Докажите, что все три графика имеют общую точку.

Геометрия

1. Высоты BB_1 и CC_1 остроугольного неравнобедренного треугольника ABC пересекаются в точке H. Описанная окружность треугольника AB_1C_1 пересекает описанную окружность треугольника ABC вторично в точке K. Докажите, что прямая KH делит отрезок BC пополам.

2. Отрезок, соединяющий середины меньших дуг AB и AC описанной окружности треугольника ABC, пересекает стороны AB и AC в точках P и Q соответственно. Докажите, что $APIQ$ — ромб, где I — центр вписанной окружности треугольника ABC.

3. Из точки P вне окружности ω с центром в точке O проведены касательные PA и PB к окружности ω (A и B — точки касания), а также через точку P проведена секущая, пересекающая окружность ω в точках C и D. Докажите, что середина отрезка AB лежит на описанной окружности треугольника COD.

4. В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC высоты AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в точке H, а точка O — центр описанной окружности ABC. Докажите, что точка, симметричная A относительно B_1C_1, лежит на описанной окружности треугольника A_1OH.

5. Внутри параллелограмма $ABCD$ отмечена точка P такая, что $\angle BAP = \angle BCP$. Докажите, что $\angle CBP = \angle CDP$.

Комбинаторика

1. Про связный ориентированный граф известно, что если мы выйдем из любой вершины A по любому ребру, то потом сможем вернуться по ребрам в вершину A. Докажите, что граф сильно связный.
2. Докажите, что из сильно связного турнира можно удалить вершину так, что он останется сильно связным.
3. На плоскости расположены 5 точек общего положения. Докажите, что 4 из них являются вершинами выпуклого многоугольника.