

Подобные треугольники

1. (а) Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC , I_a — центр невписанной окружности, вписанной в угол A . Докажите, что

$$AI \cdot AI_a = AB \cdot AC.$$

(б) Пусть r — радиус вписанной окружности треугольника ABC , r_a — радиус его невписанной окружности, вписанной в угол A . Выразите через стороны треугольника произведение rr_a .

2. На медиане BM треугольника ABC отмечена точка N такая, что $\angle ABM = \angle NAC$. Докажите, что $\angle MBC = \angle NCA$.
3. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BB_1 , CC_1 и биссектриса AL . Оказалось, что середина отрезка AL лежит на отрезке B_1C_1 . Найдите угол BAC .
4. В треугольнике ABC угол C — прямой. На катете AC во внешнюю сторону построили равнобедренный прямоугольный треугольник $AХС$ с прямым углом X . Докажите, что прямая BX делит пополам биссектрису угла C .
5. В треугольнике ABC проведены медиана AM и биссектриса AL . Точка K на отрезке AM такова, что $KL \parallel AB$. Докажите, что $BK \perp AL$.
6. В треугольнике ABC проведены высоты AP и BQ , M — середина AB , N — середина PQ . Прямая CN пересекает AB в точке D , а прямая CM пересекает PQ в точке E . Докажите, что DE — перпендикуляр к AB .
7. Вписанная окружность треугольника ABC касается его сторон BC , AC и AB в точках A_1 , B_1 , C_1 соответственно. Точка X — проекция точки A_1 на прямую B_1C_1 . Докажите, что XA_1 — биссектриса угла BXC .