По сюжету всему свету

1. **Еще один признак вписанности.** Про четырехугольник $ABCD$ известно, что $\angle ABD = \angle CBD, AD = CD,\ AB \neq BC$. Докажите, что этот четырехугольник вписан в окружность.

2. В треугольнике ABC точка I является центром вписанной окружности. Серединный перпендикуляр к биссектрисе AA_1 пересекает биссектрисы углов B и C в точках X и Y соответственно. Докажите, что точки A, I, X, Y лежат на одной окружности.

3. **Отражение ортоцентра.** Пусть H — ортоцентр треугольника ABC. Докажите, что:
   (а) Точка, симметричная H относительно прямой AC, лежит на описанной окружности треугольника ABC;
   (б) Точка, симметричная H относительно середины стороны AC, лежит на описанной окружности треугольника ABC, причем является диаметрально противоположной точке B.

4. В остроугольном треугольнике ABC отмечен ортоцентр H и середина M стороны BC. Прямая, проходящая через H и перпендикулярная HM, пересекает стороны AC, AB в точках B_1, C_1. Докажите, что точка H — середина отрезка B_1C_1.

5. **(а) Лемма о трезубце.** В треугольнике ABC точка I — центр вписанной окружности, а точка J_A — центр вневписанной окружности, касающейся стороны BC. Точка W — середина меньшей дуги BC описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что $WB = WC = WI = WJ_A$.
   (б) Внешняя лемма о трезубце. В треугольнике ABC точки J_B, J_C — центры вневписанных окружностей, касающихся сторон AC и AB соответственно. Точка N — середина большей дуги BC (т.е. дуги, содержащей точку A). Докажите, что $NB = NC = NJ_B = NJ_C$.

6. Биссектриса угла A неравнобедренного треугольника ABC повторно пересекает его описанную окружность в точке D. Окружность с центром в точке D и радиусом DC повторно пересекает AC в точке B'. Прямая BB' пересекает описанную окружность в точке E. Докажите, что B' является ортоцентром треугольника AED.

7. **Окружность Эйлера.** Рассмотрим остроугольный треугольник ABC с высотами AA_1, BB_1, CC_1, пересекающимися в точке H. Пусть A_2, B_2, C_2 середины сторон BC, AC, AB соответственно, а A_3, B_3, C_3 середины отрезков AH, BH, CH. Тогда точки $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3$ лежат на одной окружности.
   (а) Докажите теорему с помощью отражений ортоцентра.
   (б) Докажите теорему с помощью лемм о трезубце.

8. В окружность вписан четырёхугольник $ABCD$. Отметили центры окружностей, вписанных в треугольники BCD, CDA, DAB, ABC. Докажите, что отмеченные точки являются вершинами прямоугольника.

9. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$, в котором $\angle DAB = 90°$, а M — середина стороны BC. Оказалось, что $\angle ADC = \angle BAM$. Докажите, что $\angle ADB = \angle CAM$.