

Выпуклость

Фигура называется *выпуклой*, если отрезок, соединяющий любые две точки фигуры, целиком лежит внутри фигуры.

В случае многоугольника можно дать другие эквивалентные определения.

- Многоугольник лежит в одной полуплоскости от каждой прямой, проходящей через его сторону.
- Все углы многоугольника меньше 180° .

Выпуклой оболочкой множества точек X называется наименьшее выпуклое множество, содержащее X .

1. Докажите, что многоугольник является выпуклым тогда и только тогда, когда он совпадает со своей выпуклой оболочкой.
2. Из конечного множества точек удалили одну точку. Как может измениться количество вершин выпуклой оболочки?
3. На плоскости расположены 5 точек общего положения. Докажите, что 4 из них являются вершинами выпуклого многоугольника.
4. На плоскости дано $n > 4$ точек, никакие 3 из которых не лежат на одной прямой. Известно, что любые четыре из них являются вершинами выпуклого четырёхугольника. Докажите, что n точек являются вершинами выпуклого n -угольника.
5. Несколько прямых, не все из которых параллельны, разбивают плоскость на части. Докажите, что хотя бы одна из этих частей — это угол.
6. На плоскости даны 6 точек, никакие 3 из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что найдётся угол с вершинами в этих точках, не превосходящий 30° .
7. На плоскости отметили несколько точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Какое наибольшее количество точек могли отметить, если известно, что любой треугольник с вершинами в отмеченных точках является
(а) остроугольным; (б) тупоугольным?
8. Дан n -угольник. Докажите, что множество точек внутри него, из которых целиком видны все его стороны, либо пусто, либо заполняет внутренность выпуклого m -угольника, где $m \leq n$.