Теорема Фалеса и подобие

1. На стороне BC треугольника ABC сидит жук. Он начинает последовательно ползти: параллельно AB до стороны AC, параллельно BC до стороны AB, параллельно AC до стороны BC и далее по циклу. Обязательно ли он в какой-то момент вернётся в изначальную точку?

2. Прямая, параллельная основаниям трапеции, пересекает боковые стороны трапеции в точках K и L, а диагонали — в точках M и N. Докажите, что $KM = LN$.

3. Три прямые, параллельные сторонам данного треугольника, отсекают от него три треугольника, причём остаётся шестиугольник с равными сторонами. Найдите длину стороны шестиугольника, если длины сторон треугольника равны a, b, c.

4. Пусть B_1 и C_1 — проекции вершин B и C треугольника ABC на внешнюю биссектрису его угла A. Докажите, что отрезки B_1C и BC_1 пересекаются на внутренней биссектрисе угла A.

5. В треугольнике ABC проведены медианы BB_1 и CC_1 и на стороне BC отмечена точка X. На сторонах AB и AC отмечены точки P и Q соответственно так, что $PX \parallel CC_1$ и $QX \parallel BB_1$. Докажите, что отрезок PQ разбивается на три равные части медианами BB_1 и CC_1.

6. На стороне CB треугольника ABC взята точка M, а на стороне CA точка P. Известно, что $CP : CA = 2CM : CB$. Через точку M проведена прямая, параллельная CA, а через P — прямая параллельная AB. Докажите, что построенные прямые пересекаются на медиане, выходящей из вершины C.

7. В трапеции $ABCD$ на боковой стороне AB дана точка K. Через точку A провели прямую ℓ, параллельную прямой KC, а через точку B — прямую m, параллельную прямой KD. Докажите, что точка пересечения прямых ℓ и m лежит на стороне CD.

8. Через вершины A, B и C треугольника ABC проведены параллельные прямые, пересекающие прямые BC, CA и AB в точках P, Q и R соответственно. Точки P', Q' и R'; расположены на отрезках AP, BQ и CR соответственно таким образом, что
$$AP = 3AP', \quad BQ = 3BQ', \quad CR = 3CR'.$$
Докажите, что точки P', Q', R' лежат на одной прямой.

9. Дана трапеция $ABCD$. Прямая ℓ пересекает отрезки AB и CD в точках P и Q, диагонали AC и BD — в точках M и N, прямые AD и BC — в точках X и Y. Докажите, что если $XP = YQ$, то $XM = YN$.