

## По мотивам УТЮМа

1. Докажите, что ни при каком натуральном  $n$  число  $n^2 + n + 1$  нельзя представить в виде произведения двух натуральных чисел, разность которых меньше  $2\sqrt{n}$ .
2. В треугольнике  $ABC$  точка  $K$  – середина стороны  $AB$ , а точка  $L$  на стороне  $AC$  такова, что  $AL = LC + CB$ . Докажите, что  $\angle KLB = 90^\circ$  тогда и только тогда, когда  $AC = 3CB$ .
3. Петя расставил числа  $1, 2, \dots, 9$  в клетки квадрата  $3 \times 3$ , каждое по одному разу. Затем Вася посчитал количество трехклеточных уголков внутри квадрата, сумма чисел в клетках которых делится на 3. Какое наибольшее количество могло получиться у Васи?
4. На каждой из 2023 карточек написано натуральное число. Если число на одной из карточек равно сумме чисел на двух других карточках, это число можно умножить на любое натуральное число, большее 1. Докажите, что это удастся сделать только конечное число раз.
5. Неотрицательные числа  $x, y$  удовлетворяют условию  $x + y^2 = y^3 + 1$ . Докажите, что

$$y + x^2 \leq x^3 + 1.$$

6. Два кальмара вынуждены участвовать в игре. Перед началом игры они узнают все правила и смогут договориться о своих действиях. Затем будут заперты в соседних комнатах, и каждому будет выдана карточка, на которой написано натуральное число. Известно, что числа на карточках различны и не превосходят 2023. Далее кальмары по очереди делают ходы. За ход можно сделать одно из двух действий:
  - Очень громко сказать любое натуральное число. Это число будет услышано другим кальмаром.
  - Сказать, у кого из кальмаров на карточке большее число.

Если во втором случае ответ верен, то кальмаров отпускают, иначе жарят. Как кальмарам договориться, чтобы выжить, и чтобы при этом сумма всех названных кальмарами чисел не превышала 25?

7. Для натурального  $n$  обозначим через  $f(n)$  сумму квадратов натуральных делителей числа  $n$ . Назовем натуральное число  $n$  шестичным, если оно равно произведению двух простых чисел, отличающихся на 6. Можно проверить, что если  $n$  – шестичное, то  $f(n) = n^2 + 2n + 37$ . Найдите все не шестичные  $n$ , для которых  $f(n) = n^2 + 2n + 37$ .