

Комбинаторный разбой

1. Среди n рыцарей каждые двое — либо друзья, либо враги. У каждого из рыцарей ровно три врага, причём враги его друзей являются его врагами. При каких n такое возможно?
2. Несколько детей стоят по кругу. В центре круга злая воспитательница. У каждого ребенка есть некоторое количество конфет. Сначала у каждого чётное количество конфет. По команде каждый передает половину своих конфет стоящему справа. Если после этого у кого-нибудь оказалось нечётное количество конфет, то воспитательница отнимает у него одну конфету. Затем процесс повторяется. Докажите, что в какой-то момент у всех детей будет поровну конфет.
3. Даны 15 целых чисел, среди которых нет одинаковых. Игорь записал на доску все возможные суммы по 7 из этих чисел, а Иван — все возможные суммы по 8 из этих чисел. Могло ли случиться, что они выписали на доску одни и те же наборы чисел?
4. На клетчатой доске лежат доминошки, не касаясь даже углами. Каждая доминошка занимает две соседние (по стороне) клетки доски. Нижняя левая и правая верхняя клетки доски свободны. Всегда ли можно пройти из левой нижней клетки в правую верхнюю, делая ходы только вверх и вправо на соседние по стороне клетки и не наступая на доминошки, если доска имеет размеры
(а) 100×101 клеток; (б) 100×100 клеток?
5. На корабле 32 матроса. Каждый вечер в каюткомпании для обсуждения важных вопросов собираются трое матросов. За первые 33 вечера плавания составы обсуждающих ни разу не повторились. Докажите, что можно указать такие два вечера, что составы обсуждающих в эти вечера пересекаются ровно по одному матросу.
6. Все стороны и диагонали правильного двенадцатиугольника покрашены в 12 цветов (каждый отрезок одним цветом). Могло ли оказаться так, что для любых трех цветов найдутся три вершины, попарно соединенные между собой отрезками этих цветов?
7. Колода из 36 карт сложена так, что через четыре карты масть повторяется. Несколько карт сверху сняли, не перекладывая перевернули и вставили произвольным образом (не обязательно подряд) между оставшимися. После этого колоду разделили на 9 стопок по 4 идущие подряд карты. Докажите, что в каждой из этих стопок встретится по одной карте каждой масти.