

## Конечное и бесконечное

**Важная мысль.** «Сколь угодно много»  $\neq$  «бесконечно много». Например, существует сколь угодно много подряд идущих составных чисел, но бесконечно много — не существует.

1. Придумайте последовательность, в которой каждое натуральное число встречается бесконечно много раз.
2. Кузнечик стартует в точке 0 на числовой прямой. Он умеет прыгать на любую натуральную длину, не превосходящую 1000, в обе стороны. Может ли он побывать ровно по одному разу во всех целых точках от  $-10^6$  до  $10^6$ ? А во всех целых точках числовой прямой?
3. Натуральные числа раскрасили в два цвета. Обязательно ли существует одноцветная бесконечная арифметическая прогрессия (то есть последовательность, в которой разность соседних чисел одна и та же)?
4. (а) Существует ли бесконечное множество натуральных чисел такое, что любые 99 его элементов имеют общий делитель, больший 1, а любые 100 взаимно просты?  
(б) В бесконечном множестве натуральных чисел у любого конечного подмножества есть общий делитель, больший единицы. Обязательно ли у всех чисел есть общий делитель, больший единицы?
5. **Лемма Кёнига.** Докажите, что в бесконечном дереве, степень каждой вершины которого конечна, найдётся бесконечный путь.
6. В стране роботов любые конечные или бесконечные последовательности из 0 и 1 называются словами. Некоторые конечные слова объявлены *матерными*. Слово называется *цензурным*, если оно не содержит матерных подслов.  
(а) Известно, что существуют сколь угодно длинные конечные цензурные слова. Докажите, что существует бесконечное цензурное слово.  
(б) Известно, что матерных слов конечное число и существует бесконечное цензурное слово. Докажите, что существует бесконечное периодическое цензурное слово.  
(в) Останется ли верным утверждение предыдущего пункта, если снять ограничение на конечность множества матерных слов?