Транснеравенство

Транснеравенство. Пусть $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n$ и $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_n$ — упорядоченные по неубыванию наборы вещественных чисел. Пусть также $c_1, c_2, \ldots, c_n$ — некоторая перестановка чисел $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Тогда

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n \geqslant a_1c_1 + a_2c_2 + \ldots + a_nc_n \geqslant a_1b_n + a_2b_{n-1} + \ldots + a_nb_1.$$

1. **(а)** Докажите транснеравенство для $n = 2$.

(б) Используя результат прошлого пункта, докажите транснеравенство для произвольного натурального n.

2. Для вещественных чисел x, y, z докажите неравенства:

(а) $x^4 + y^4 + z^4 \geqslant x^3y + y^3z + z^3x$; **(б)** $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \geqslant \frac{x+y+z}{xyz}$.

3. Для положительных чисел x, y, z докажите неравенства:

(а) $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \geqslant 3$; **(б)** $x + y + z \geqslant \frac{x(y+1)}{x+1} + \frac{y(z+1)}{y+1} + \frac{z(x+1)}{z+1}$;

(в) $x^3 + y^3 + z^3 \geqslant 3xyz$.

4. Пусть $a_i,\ i = 1, \ldots n$, — некоторые различные натуральные числа. Докажите, что

$$\frac{a_1}{1^2} + \frac{a_2}{2^2} + \ldots + \frac{a_n}{n^2} \geqslant \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

5. **Неравенство Чебышёва.** Пусть $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n$ и $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_n$ — упорядоченные по неубыванию наборы вещественных чисел. Тогда

$$\frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n}{n} \geqslant \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{n}.$$

6. Для положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ докажите, что

$$\sum_{i<j} \frac{x_ix_j}{x_i + x_j} \leqslant \frac{n}{2(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)} \sum_{i<j} x_ix_j.$$

(Подсказка. Сначала докажите неравенство для $n = 3$).