

Площадь

Факт. Треугольники с одинаковым основанием и одинаковой высотой имеют одинаковые площади. В частности, медиана треугольника делит его площадь пополам.

1. Четыре квадрата расположены, как показано на рисунке 1. Площадь маленького квадрата равна 20. Чему равна площадь серого треугольника?
2. Внутри параллелограмма отмечена точка (см. рисунок 2). Докажите, что сумма площадей серых треугольников равна половине площади параллелограмма.

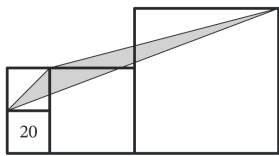


Рис. 1: к задаче 1

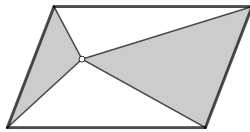


Рис. 2: к задаче 2

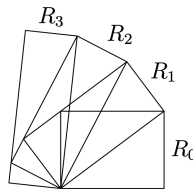


Рис. 3: к задаче 3

3. Прямоугольники R_0 , R_1 , R_2 и R_3 расположены, как показано на рисунке 3. Площадь R_0 равна 1. Найдите площадь фигуры, образованной объединением всех четырёх прямоугольников.
4. Центр единичного квадрата является вершиной трёх других квадратов (см. рисунок 4). Найдите площадь, закрашенную серым.

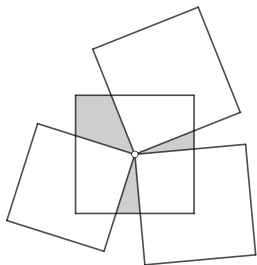


Рис. 4: к задаче 4

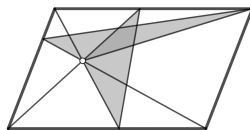


Рис. 5: к задаче 5

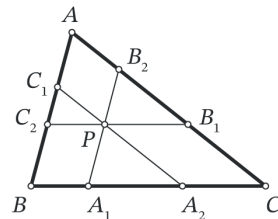


Рис. 6: к задаче 8

5. Внутри параллелограмма выбрана точка. Через неё и три вершины проведены прямые до пересечения со сторонами параллелограмма (см. рисунок 5). Докажите, что площади серых треугольников равны.
6. В шестиугольнике противоположные стороны параллельны. Докажите, что если две пары противоположных сторон параллельны соответствующим диагоналям, то это верно и для третьей пары.
7. (а) Середины противоположных сторон четырёхугольника соединены отрезками (см. рисунок 7). Докажите, что серая площадь составляет половину площади четырёхугольника.
(б) Каждая из сторон четырёхугольника разбита на четыре одинаковые части, и соответствующие точки соединены отрезками (см. рисунок 8). Докажите, что серая площадь составляет половину площади четырёхугольника.
(в) Каждая из сторон четырёхугольника разбита на три одинаковые части, и соответствующие точки соединены отрезками (см. рисунок 9). Докажите, что площадь серого четырёхугольника составляет $\frac{1}{9}$ от площади четырёхугольника.

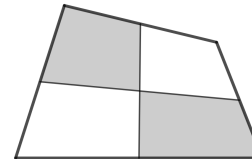


Рис. 7: к задаче 7а

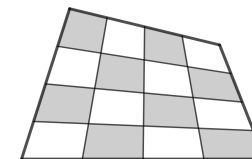


Рис. 8: к задаче 7б

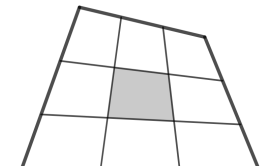


Рис. 9: к задаче 7в

8. Через точку P внутри треугольника ABC провели прямые, параллельные сторонам. Докажите, что площади треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ равны.