

Конструктивы в ТЧ

1. Существует ли арифметическая прогрессия $a_1, a_2, \dots, a_{1000}$ с ненулевой разностью такая, что каждый её член имеет вид $\frac{1}{n}$, для некоторого натурального n ?
2. Докажите, что найдется такое натуральное число $n > 1$, что произведение некоторых n последовательных натуральных чисел равно произведению некоторых $n + 100$ последовательных натуральных чисел.
3. Существуют ли три попарно различных ненулевых целых числа, сумма которых равна нулю, а сумма тринадцатых степеней которых является квадратом некоторого натурального числа?
4. Докажите, что существует бесконечно много таких троек натуральных чисел a, b, c , что $a^{21} + b^{23} = c^{22}$.
5. Существуют ли такие натуральные $a, b, c > 10^5$, что $a^2 - 1$ делится на b , $b^2 - 1$ делится на c , $c^2 - 1$ делится на a ?
6. Существует ли возрастающая арифметическая прогрессия длины 2023, все члены которой являются точными степенями, выше десятой?
7. Существует ли такой набор из 1000 различных натуральных чисел, что для любых двух чисел из набора их сумма делится на их разность?
8. Докажите, что найдутся четыре таких целых числа a, b, c, d по модулю больших 10^{10} , что

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = \frac{1}{abcd}$$