

Усреднение

Утверждение. Если среднее значение некоторой величины по всем ситуациям равно k , то найдется ситуация, в которой она не меньше k , а также ситуация, в которой она не больше k .

Пример. Во взводе 10 человек. В каждый из 100 дней какие-то четверо назначались дежурными. Докажите, что какие-то двое были вместе на дежурстве не менее 14 раз.

1. В парке по кругу стоят 52 дерева. На эти деревья как-то сели 15 птиц. Докажите, что найдутся 7 подряд идущих деревьев, на которых в сумме сидят, по крайней мере, 3 птицы.
2. В школе, в которой учится 100 человек, открылась запись на 45 кружков. Каждый ученик записался ровно на 36 кружков. Докажите, что найдутся 3 кружка, на которые суммарно записались все ученики школы.
3. По краю круглого стола равномерно расставлены 20 табличек «технарь» и 20 табличек «гуманитарий». 20 технарей и 20 гуманитариев в случайном порядке сели за стол. Если у кого-то табличка не соответствует складу ума, то он обижается. Какого наименьшего количества обидевшихся можно гарантированно добиться поворотом стола?
4. Даны 2 единичных куба. Сначала Петя расставляет на ребрах обоих кубов стрелочки, потом Вася совмещает эти кубы. Петя выигрывает, если после совмещения кубов больше половины стрелочек одного куба совпадут с соответствующими стрелочками другого куба, а Вася — если совпадут меньше половины стрелочек. Если совпадет ровно половина стрелочек — ничья. Каким будет результат при правильной игре обоих партнеров?
5. В таблице 20×20 в каждой клетке стоит крестик или нолик, причем в каждом столбце ровно 10 крестиков и 10 ноликов. Докажите, что можно найти две строки, которые совпадают, по крайней мере, в 10 позициях.
6. Все клетки доски 8×8 покрашены в черный и белый цвета. Известно, что есть не менее 17 черных и не менее 25 белых клеток. Докажите, что на эту доску можно поставить 8 не бьющих друг друга ладей так, чтобы хотя бы 3 из них стояли на черных клетках и хотя бы 4 на белых.
7. В каждом из 2023 ведер лежит по 2023 камня. Камни в каждом ведре имеют суммарную массу 1 кг и занумерованы числами от 1 до 2023. Игорю поручено выбрать по одному камню из каждого ведра так, чтобы все их номера были различны, а их суммарная масса была не меньше 1 кг. При каком наибольшем k у Игоря всегда есть не менее k способов выполнить это задание, какие бы камни ни лежали в ведрах?
8. Дано натуральное n . Докажите, из любого графа можно удалить не более $\frac{1}{n}$ всех ребер так, чтобы вершины графа можно было правильно раскрасить в n цветов (т.е. так, чтобы ребрами были соединены только разноцветные вершины).