

## Касательные к окружности

**Утверждение.** Вписанная и невписанная окружности треугольника  $ABC$  касаются стороны  $BC$  в точках  $A_1$  и  $A_2$  соответственно. Тогда  $BA_1 = CA_2 = p - b$ , где  $b$  — длина стороны  $AC$ ,  $p$  — полупериметр треугольника  $ABC$ .

1. Докажите, что середина стороны  $BC$  треугольника  $ABC$  равноудалена от точек касания невписанных окружностей с продолжениями стороны  $BC$ .
2. (а) Выразите радиус вписанной окружности прямоугольного треугольника через его стороны.  
(б) Выразите радиус невписанных окружностей прямоугольного треугольника через его стороны.
3. Дан параллелограмм  $ABCD$ . Вписанные окружности треугольников  $ABD$  и  $BCD$  касаются диагонали  $BD$  в точках  $X$  и  $Y$ . Вписанные окружности треугольников  $BAC$  и  $ACD$  касаются диагонали  $AC$  в точках  $Z$  и  $T$  соответственно. Докажите, что если все точки  $X, Y, Z, T$  различны, то они являются вершинами прямоугольника.
4. Дан параллелограмм  $ABCD$ . Невписанная окружность треугольника  $ABD$  касается продолжений сторон  $AB$  и  $AD$  в точках  $M$  и  $N$  соответственно. Вписанная окружность треугольника  $BCD$  касается его сторон  $BC$  и  $CD$  в точках  $P$  и  $Q$ . Докажите, что точки  $M, N, P, Q$  лежат на одной прямой.
5. Дана равнобокая трапеция  $ABCD$  с основаниями  $AD$  и  $BC$ . В треугольники  $ABC$  и  $ABD$  вписаны окружности с центрами  $I_1$  и  $I_2$  соответственно. Докажите, что прямая  $I_1I_2$  перпендикулярна  $BC$ .
6. Вписанная в прямоугольный треугольник  $ABC$  окружность касается гипотенузы  $AB$  в точке  $C_1$ , а катетов  $CA$  и  $CB$  — в точках  $B_1$  и  $A_1$  соответственно. Невписанная окружность касается стороны  $BC$  в точке  $A_2$ . Докажите, что отрезки  $A_2B_1$  и  $A_1C_1$  перпендикулярны.
7. На гипотенузе  $AC$  прямоугольного треугольника  $ABC$  отметили такую точку  $C_1$ , что  $BC = CC_1$ . Затем на катете  $AB$  отметили такую точку  $C_2$ , что  $AC_2 = AC_1$ ; аналогично определяются точки  $A_1$  и  $A_2$ . Найдите угол  $AMC$ , где  $M$  — середина отрезка  $A_2C_2$ .
8. В трапеции  $ABCD$  биссектрисы углов  $A$  и  $D$  пересекаются в точке  $E$ , лежащей на боковой стороне  $BC$ . Эти биссектрисы разбивают трапецию на три треугольника, в каждый из которых вписана окружность. Одна из этих окружностей касается основания  $AB$  в точке  $K$ , а две другие касаются биссектрисы  $DE$  в точках  $M$  и  $N$ . Докажите, что  $BK = MN$ .