А. А. Соколов, Ф. Е. Вылегжанин, М. А. Ложкин,
Е. А. Лычагина, И. Н. Михайлов, В. И. Ретинский

Программа зачёта кружка в ЦПМ, 7 класс, 2023-2024

Почти ко всем вопросам прикреплена ссылка на листик, в рамках которого этот вопрос разбирался. Но что-то разбиралось на программе в Сириусе, к этим вопросам прикреплена ссылка на другие источники.

Во всех теоретических вопросах нужно знать не только формулировку, но и доказательство. Все задачи были выданы и разобраны на занятиях кружка.

Теория

Алгебра

1. Числа сочетаний. Алгебраическая формула для чисел сочетаний. Бином Ньютона. Вычисление суммы $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k$. Листик, разбор.
2. Принцип математической индукции. Формула для суммы первых чисел/квадратов чисел натурального ряда. Листик.
3. Сравнения по модулю, основные свойства сравнений. Листик.
4. НОД натуральных чисел. Алгоритм Евклида. Лемма о линейном разложении НОД. Листик, Сириус.Курсы.
5. Доказательство основной теоремы арифметики. Доказательство.
6. Обратные остатки. Теорема Вильсона. Листик, Сириус.Курсы 1, Сириус Курсы 2.
7. Степень вхождения двойки в сумму и произведение двух чисел. Степень вхождения двойки в $n!$. Листик, разбор.
8. Числа Фибоначчи. Сумма первых чисел Фибоначчи. Фибоначчиева система счисления. Листик.
9. Системы счисления по натуральному основанию $b > 1$. Листик.

Геометрия

1. Против большей стороны треугольника лежит больший угол и наоборот. Неравенство треугольника. Листик
2. Средняя линия треугольника, трапеции. Листик.
3. Параллелограмм Вариньона. Листик, разбор.
4. Выражение углов между биссектрисами (внутренними/внешними) через углы треугольника. Листик, разбор.

5. Выражение отрезков касательных из вершин треугольника ко вписанной и вневписанным окружностям через стороны треугольника. Листик, разбор.

6. Определение выпуклой фигуры на плоскости. Сумма внутренних и внешних углов выпуклого многоугольника. Листик, разбор.

Комбинаторика

1. Принцип зацикливания, принцип зацикливания без предпериода, примеры. Листик.

2. Деревья: эквивалентные определения и основные свойства. Остовное дерево, существование остовного дерева в связном графе. Листик.

3. Подвешивание за вершину. Структура графа после подвешивания: какие вершины входят в k-ый уровень, какие вершины могут быть соединены ребром. Листик, Сириус.Курсы.

4. Критерий двудольности графа. Листик, Сириус.Курсы.

5. Критерии существования эйлерова цикла и эйлерова пути в графе. Листик.

6. Метод математической индукции. База, предположение, переход индукции.

Задачи

Алгебра

1. Найдите последнюю цифру числа $7^{7^{7^{7}}}$. Листик, разбор.

2. На доске выписаны числа
$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}.$$
Разрешается стереть любые два числа a и b и заменить их на число $ab + a + b$. Какие числа могут остаться после $n - 1$ такой операции? Листик, разбор.

3. Докажите, что для любых натуральных чисел a и b выполняется неравенство
$$S(ab) \leqslant S(a) \cdot S(b),$$
где $S(n)$ обозначает сумму цифр натурального числа n. Листик, разбор.

4. Из чисел от 1 до $2n$ выбрано $n + 1$ число. Докажите, что среди выбранных чисел найдутся два, одно из которых делится на другое. Листик, разбор.

5. Ненулевое вещественное число x таково, что число $x + \frac{1}{x}$ является целым. Докажите, что число $x^n + \frac{1}{x^n}$ также является целым для любого натурального n. Листик, разбор.

6. Племя Мумбо-Юмбо решило выпустить в обращение денежные купюры достоинством a мумбов и b мумбов, причём НОД$(a, b) = 1$. Докажите, что любую сумму, большую $ab - a - b$ мумбов, можно заплатить без сдачи. Листик, решение.

7. Целые числа x и y таковы, что $23x+30y$ даёт остаток 1 при делении на 91. Какой остаток при делении на 91 даёт $x+29y$? Листик, решение.

8. Докажите, что если простое число $p \neq 3$ является делителем числа вида a^2+9 для некоторого целого a, то p является делителем числа вида c^2+1 для некоторого целого c. Листик, решение.

9. Даны натуральные числа a и b, причём $a < 1000$. Докажите, что если a^{21} делится на b^{10}, то a^2 делится на b. Листик, разбор.

10. На доске написано натуральное число n. Каждую минуту число на доске стирают и вместо него записывают $n/2$, если число было чётным, или $3n+1$, если число было нечётным. Докажите, что в этой последовательности обязательно встретится число, делящееся на 4. Листик, разбор.

11. Докажите, что сумма ста последовательных чисел Фибоначчи не является числом Фибоначчи. Листик.

12. Решите в целых числах уравнение $2xy - x + y = 10$ Листик, разбор.

13. Докажите, что из набора $0, 1, 2, \ldots, 3^k-1$ можно выбрать 2^k чисел так, чтобы никакое из них не являлось средним арифметическим двух других выбранных чисел. Листик.

Геометрия

1. Пусть M — середина стороны BC треугольника ABC. Докажите, что $2AM \leqslant AB + AC$. Сириус.Курсы.

2. На стороне AC треугольника ABC выбрали точки P и Q такие, что $BA = AP$ и $CB = CQ$. Пусть I — точка пересечения биссектрис треугольника ABC. Докажите, что треугольник IPQ равнобедренный. Листик, разбор.

3. Внутри острого угла с вершиной в точке O отмечены точки M и N, а на сторонах угла — точки P и Q такие, что $\angle MOP = \angle NOQ$ и точка O лежит на биссектрисах внешних углов при вершинах P и Q треугольников MPN и MQN соответственно. Докажите, что длины ломаных MPN и MQN равны. Сириус.Курсы.

4. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ известно, что $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, а угол B меньше угла B_1. Докажите, что $AC < A_1C_1$. Листик, разбор.

5. Выпуклый многоугольник M лежит внутри выпуклого многоугольника N. Докажите, что периметр M не больше периметра N. Листик, разбор.

6. На гипотенузе AC прямоугольного треугольника ABC выбрана такая точка D, что $BC = CD$. На катете BC взята такая точка E, что $DE = CE$. Докажите равенство $AD + BE = DE$. Листик, разбор.

7. В четырёхугольнике $ABCD$, противоположные стороны которого не параллельны, точка E — середина AB, F — середина CD. Докажите, что середины отрезков AF, CE, BF и DE являются вершинами параллелограмма. Листик, разбор.

8. На сторонах треугольника ABC внешним образом построены правильные треугольники A_1BC, B_1AC и C_1AB. Докажите, что $AA_1 = BB_1 = CC_1$. Листик, разбор

9. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ взяты точки M и N соответственно, причём
   (а) $\angle MAN = \angle NAD$. Докажите, что $BM + DN = AM$.
   (б) $\angle MAN = 45°$. Докажите, что $BM + DN = MN$.
   Листик, разбор.

10. В треугольнике ABC с углом B, равным $120°$, проведены биссектрисы AA_1, BB_1 и CC_1. Докажите, что $\angle A_1B_1C_1 = 90°$. Листик, разбор.

11. На какое наименьшее количество треугольников можно разрезать (не обязательно диагоналями) выпуклый n-угольник? Листик, разбор.

Комбинаторика

1. В графе степень каждой вершины равна трём, и любые две несоседние вершины имеют общего соседа. Какое максимальное количество вершин может быть в этом графе? Листик, разбор.

2. Дано натуральное число n. Докажите, что

$$\left(C_n^0\right)^2 + \left(C_n^1\right)^2 + \ldots + \left(C_n^n\right)^2 = C_{2n}^n.$$

   Листик, разбор.

3. На плоскости дано $2N$ точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой, N из них окрашены в красный цвет, остальные в синий. Докажите, что эти точки можно соединить N непересекающимися отрезками, каждый из которых будет соединять красную точку с синей. Листик, разбор.

4. Сколько существует слов длины n, состоящих только из букв A и B, у которых в записи
   (а) нет двух букв B подряд?
   (б) количество букв B не превосходит номера самой первой буквы B?
   Листик, разбор.

5. За круглым столом сидит чётное количество чебурашек. У каждого из них есть несколько шариков, причём у любых двух рядом сидящих чебурашек количество шариков отличается не больше, чем на 1. Докажите, что найдется пара чебурашек, сидящих напротив друг друга, у которых количество шариков отличается не больше, чем на 1. Листик, разбор.

6. В одну из голов стоглавого дракона пришла мысль расположить свои головы так, чтобы каждая находилась между двумя другими. Сможет ли он это сделать? (Головы дракона можно считать точками в пространстве.) Листик, разбор.

7. Тетрадный лист раскрасили в 23 цвета по клеткам. Пара цветов называется хорошей, если существуют две соседние клетки, закрашенные этими цветами. Каково минимальное число хороших пар? Листик, разбор.

8. Имеется шоколадка $m \times n$. За один ход можно съесть дольку, а также все дольки, которые находятся выше, правее, а также выше и правее выбранной. Проигрывает тот, кто откусывает последнюю дольку. Кто выигрывает при правильной игре? Листик, разбор.

9. Два игрока по очереди закрашивают клетки поля $m \times n$, каждый своим цветом. Своими первыми ходами они закрашивают противоположные угловые клетки. Далее каждый ведёт свою «змейку», всякий раз закрашивая клетку, соседнюю по стороне с той, что он красил предыдущим ходом. «Змейкам» соперников запрещено соприкасаться по стороне клетки. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто победит в этой игре, как бы ни играл его партнёр, если а) $m = n = 9$; б) $m = 9,\ n = 10$? Листик, разбор.

10. Том Сойер и Гекльберри Финн красят забор из 20 досок. Каждый по очереди красит одну из досок (любую по своему выбору) в синий или зелёный цвет. Начинает Том. Когда весь забор покрашен, подсчитывают число n изменений цвета (то есть границ, где синий цвет сменяется зелёным и наоборот) и Гекльберри отдаёт Тому n фантиков. Какое наименьшее количество фантиков будет вынужден отдать Гекльберри? Листик, разбор.

11. Каждому из n мудрецов надевают колпак одного из n цветов. Каждый мудрец видит колпаки всех других мудрецов, но не видит своего. Они должны одновременно попытаться угадать цвет своего колпака, написав его на бумажках. Докажите, что мудрецы могут заранее договориться действовать так, чтобы хотя бы один из них угадал. Листик, разбор.

12. Даны натуральные числа n и k, $n > k$. На окружности отмечены n точек, в одной из которых изначально сидит кузнечик. Кузнечик умеет прыгать против часовой стрелки из одной отмеченной точки в другую, каждый раз перелетая через $k - 1$ отмеченную точку.

    (а) Докажите, что кузнечик побывает во всех отмеченных точках тогда и только тогда, когда НОД$(n, k) = 1$.

    (б) Назовём *орбитой* точки A множество точек, достижимых из A. Докажите, что все отмеченные точки разбиваются на НОД(n, k) попарно непересекающихся одинаковых орбит. Листик, разбор.

13. Четыре кузнечика сидят в вершинах квадрата. Каждую минуту один из них прыгает в точку, симметричную ему относительно другого кузнечика.

    (а) Докажите, что никакие три кузнечика не могут оказаться на одной прямой, параллельной стороне квадрата.

    (б) Докажите, что кузнечики не могут в некоторый момент оказаться в вершинах квадрата большего размера. Листик, разбор.