Образовательная программа в «Сириусе»
1–12 декабря 2023 г., 7 класс
Материалы занятий

Содержание

Часть I

Алгебра

Метод математической индукции

1. Докажите тождества

(а) $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$;

(б) $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

2. Найдите значения выражений

(а) $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(n-1)\cdot n}$;

(б) $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n!$.

3. Докажите неравенство

$$\sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6}}}}} < 3.$$

4. Докажите неравенства

(а) $2^n > n$ при всех натуральных n;

(б) $2^n > n^2$ при натуральных $n > 4$;

(в) $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \ldots + \frac{n-1}{n!} < 1$ при всех натуральных n.

5. Ненулевое вещественное число x таково, что число $x + \frac{1}{x}$ является целым. Докажите, что число $x^n + \frac{1}{x^n}$ также является целым для любого натурального n.

6. Докажите, что существует 100-значное число, делящееся на 2^{100}, в десятичной записи которого участвуют только цифры 1 и 2.

7. Докажите, что число $11\ldots1$ (3^n единиц) делится на 3^n.

8. Изначально на доске записаны несколько (больше одного натуральных чисел). Затем каждую минуту на доску записывается число, равное сумме квадратов всех уже записанных на ней чисел. Докажите, что сотое записанное число имеет хотя бы 100 различных простых делителей.

9. Назовём множество (различных) натуральных чисел *привлекательным*, если любое число из этого множества является делителем суммы всех остальных чисел. Существует ли привлекательное множество, состоящее из миллиона чисел?

Метод математической индукции. Добавка

1. Дано натуральное число n. Докажите, что число

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3$$

является полным квадратом.

2. Последовательность целых чисел $a_1, a_2, \ldots$ определена следующим образом

$$a_1 = 1, \qquad a_k = \lfloor\sqrt{a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1}}\rfloor \text{ для } k > 1$$

(здесь $\lfloor x \rfloor$ — целая часть числа x). Найдите, чему равно a_{1000}.

3. Петя и Вася по очереди пишут на доску дроби вида $1/n$, где n — натуральное число. Начинает Петя. Петя каждый ход пишет только одну дробь, а Вася за первый ход пишет одну дробь, за второй – две, за третий – три и т.д. Вася хочет, чтобы после какого-то хода сумма всех дробей на доске была натуральным числом. Сможет ли Петя помешать ему?

4. Последовательности a_n и b_n заданы условиями

$$a_1 = 1, b_1 = 2, a_{n+1} = \frac{1 + a_n + a_n b_n}{b_n} \text{ и } b_{n+1} = \frac{1 + b_n + a_n b_n}{a_n}.$$

Докажите, что $a_{2023} < 5$.

Сравнения

Определение. Целые числа a и b *сравнимы по модулю* m, если выполнено одно из следующих эквивалентных условий:

- они имеют одинаковые остатки при делении на m;
- их разность делится на m.

1. Докажите следующие свойства сравнений по модулю:

(а) если $a \equiv b \pmod{m}$ и $c \equiv d \pmod{m}$, то $a \pm c \equiv b \pm d \pmod{m}$;

(б) если $a \equiv b \pmod{m}$ и k — целое число, то $ak \equiv bk \pmod{m}$;

(в) если $a \equiv b \pmod{m}$ и $c \equiv d \pmod{m}$, то $ac \equiv bd \pmod{m}$;

(г) если $a \equiv b \pmod{m}$, то $a^n \equiv b^n \pmod{m}$ при любом натуральном n;

(д) если $ka \equiv kb \pmod{m}$ и НОД$(k, m) = 1$, то $a \equiv b \pmod{m}$.

2. Найдите остаток от деления

(а) 6^{2023} на 7; **(б)** $9^{2023} + 13^{2023}$ на 11; **(в)** $7^{2022} + 9^{2022}$ на 10; **(г)** $5^{70} + 6^{70}$ на 61;

(д) 47^{101} на 31; **(е)** $2021 \times 2022 \times 2023 \times 2024$ на 2020 и на 2025;

(ж) $1^{101} + 2^{101} + 3^{101} + \ldots + 2022^{101}$ на 2023; **(з)** $51! + \frac{102!}{51!}$ на 103.

3. Решите в натуральных числах уравнение $2^x + 7^y = 19^z$.

4. Миша перемножил тысячу первых простых чисел, а затем то ли увеличил, то ли уменьшил полученное число на 1. Мог ли Миша получить точный квадрат?

5. Существует ли степень двойки, из которой перестановкой цифр можно получить другую степень двойки? (Цифру 0 ставить на первое место нельзя.)

6. Можно ли среди чисел $\frac{100}{1}, \frac{99}{2}, \ldots, \frac{3}{98}, \frac{2}{99}, \frac{1}{100}$ выбрать пять, произведение которых равно единице?

7. Все целые числа от 1 до n выписаны в строчку. Затем к каждому числу прибавили номер того места, на котором оно стоит. При каких n может получиться так, что все полученные суммы дают разные остатки при делении на n?

8. Пусть $S(n)$ — сумма цифр числа n. Найдите $S(S(S(4444^{4444})))$.

9. В клетках квадратной таблицы $n \times n$, где $n > 1$, требуется расставить различные целые числа от 1 до n^2 так, чтобы каждые два последовательных числа оказались в соседних по стороне клетках, а каждые два числа, дающие одинаковые остатки при делении на n, — в разных строках и в разных столбцах. При каких n это возможно?

Алгоритм Евклида и линейное разложение НОД

Определение. *Наибольшим общим делителем* целых чисел a и b называется наибольшее натуральное число $d = (a, b)$, такое что a и b делятся на d.

1. **Алгоритм Евклида.** Пусть a, b — целые числа. Докажите, что

(а) $(a, b) = (a - b, b)$; **(б)** если $a = bq + r$, то $(a, b) = (b, r)$.

2. Дано натуральное число n. На какие натуральные числа может быть сократима дробь

(а) $\dfrac{13n+8}{8n+5}$; **(б)** $\dfrac{n^2+5}{n+3}$?

3. Найдите

(а) $(99! + 100!\,,\ 101!)$; **(б)** $(2^{70} - 1\,,\ 2^{100} - 1)$; **(в)** $(\underbrace{11\ldots1}_{54}, \underbrace{11\ldots1}_{207})$.

4. **Теорема о линейном разложении НОД.** Для любых целых чисел a и b существуют такие целые числа x и y, что

$$\boxed{ax + by = (a, b).}$$

5. **(а)** Дано вещественное число x. Оказалось, что числа x^{2023} и x^{23} рациональны. Докажите, что число x тоже рационально.

(б) Пусть a, n и m — натуральные и $a > 1$. Докажите, что $(a^m - 1, a^n - 1) = a^{(m,n)} - 1$.

(в) Даны различные натуральные числа n и m. Докажите, что $(2^{2^n} + 1, 2^{2^m} + 1) = 1$.

6. На доске написаны натуральные числа $a_1, \ldots, a_k$, причём НОД$(a_1, \ldots, a_k) = 1$. Разрешается взять два числа и из большего вычесть меньшее. Докажите, что такими операциями можно получить число 1.

7. Племя Мумбо-Юмбо решило выпустить в обращение денежные купюры достоинством a мумбов и b мумбов, причём $(a, b) = 1$.

(а) Докажите, что $ab - a - b$ мумбов нельзя заплатить без сдачи.

(б) Докажите, что любую сумму, большую $ab - a - b$ мумбов, можно заплатить без сдачи.

8. На доске написаны два различных натуральных числа a и b. Меньшее из них стирают, и вместо него пишут число $\frac{ab}{|a-b|}$ (которое может уже оказаться нецелым). С полученной парой чисел делают ту же операцию и т.д. Докажите, что в некоторый момент на доске окажутся два равных натуральных числа.

9. Пусть p и q — взаимно простые натуральные числа. Лягушка прыгает по числовой прямой, начиная в точке 0, каждый раз либо на p вправо, либо на q влево. Однажды лягушка вернулась в точку 0. Докажите, что для любого натурального $d < p + q$ найдутся два числа, посещенные лягушкой и отличающиеся на d.

Сравнения-2

1. Докажите, что число $(3^n - 1)^n - 4$ делится на $3^n - 4$ при любом натуральном n.

2. Целые числа x и y таковы, что $23x + 30y$ даёт остаток 1 при делении на 91. Какой остаток при делении на 91 даёт $x + 29y$?

3. Докажите, что $p^{p+2} + (p+2)^p \equiv 0 \pmod{2p+2}$, где $p > 2$ – простое число.

4. Найдите все натуральные числа a, b, m такие, что $m! = 2^a + 2^b$.

5. Решите уравнение в натуральных числах $m! + n! = m^n$.

6. Натуральные числа x и y, большие 1, таковы, что число $x^2 + y^2 - 1$ делится на $x + y - 1$. Докажите, что число $x + y - 1$ составное.

Обратные остатки

1. Даны простое число p и целое число a, причём $(a, p) = 1$.

(а) Докажите, что числа
$$a \cdot 0, a \cdot 1, a \cdot 2, \ldots, a \cdot (p-1)$$
дают попарно различные остатки при делении на p.

(б) Докажите, что существует единственный остаток b, такой что $ab \equiv 1 \pmod{p}$.

Определение. Остаток b называется *обратным* к остатку a по натуральному модулю m, если $ab \equiv 1 \pmod{m}$. Обычно пишут $b \equiv a^{-1} \pmod{m}$ или $b \equiv \frac{1}{a} \pmod{m}$.

2. (а) У каких остатков по натуральному модулю m существуют обратные?

(б) Найдите остаток 2^{-1} по нечётному модулю m.

(в) Целое число a таково, что $a^{52} \equiv 36 \pmod{73}$ и $a^{53} \equiv 59 \pmod{73}$. Найдите остаток от деления a на 73.

3. Теорема Вильсона. Докажите, что натуральное число n является простым тогда и только тогда, когда
$$(n-1)! \equiv -1 \pmod{n}.$$

4. Докажите, что 7 можно возвести в такую натуральную степень $n > 1$, чтобы среди последних 100 цифр полученного числа было 99 нулей.

5. Пусть p — простое число. Рациональное число
$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{p-1}$$
представили в виде несократимой дроби. Докажите, что числитель этой дроби делится на p.

6. Докажите, что если простое число $p \neq 3$ является делителем числа вида $a^2 + 9$ для некоторого целого a, то p является делителем числа вида $c^2 + 1$ для некоторого целого c.

7. Докажите, что любое простое число p является делителем числа вида $2^n + 3^n + 6^n - 1$ для некоторого натурального n.

Разнобой

1. Докажите, что для любого натурального n число $2^{5n+3} + 5^n \cdot 3^{n+2}$ делится на 17.

2. Натуральные числа m и n таковы, что для каждого натурального k верно

$$(11k - 3, n) = (11k - 3, m).$$

Докажите, что $m = 11^s n$ или $n = 11^s m$ для некоторого $s \geqslant 0$.

3. Лена так разбила $2n$ натуральных чисел на пары, что произведение в каждой паре не является полным квадратом. Докажите, что количество способов разбить эти числа на пары так, чтобы произведение в каждой паре не являлось полным квадратом, хотя бы $n!$.

4. Дано p — нечётное простое число. Для каждого натурального числа $k < p$ посчитаем a_k — количество делителей числа $kp + 1$, больших k и меньших p. Чему равна сумма

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{p-1}?$$

5. Дана бесконечная возрастающая последовательность натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots$. Известно, что $a_2 = 2$ и $a_{nm} = a_n a_m$ для каждой пары взаимно простых $m, n > 1$. Докажите, что $a_n = n$ для всех натуральных n.

6. Известно, что $m^3 + 1$ делится на $mn - 1$.

   (а) Докажите, что $n^3 + 1$ делится на $mn - 1$.

   (б) Найдите все такие пары (m, n).

Часть II

Геометрия

Неравенство треугольника

1. **(Неравенство многоугольника).** Докажите, что если $A_1A_2 \ldots A_n$ — произвольный многоугольник, то выполнено неравенство $A_1A_n < A_1A_2 + \ldots + A_{n-1}A_n$.

2. **(а)** На стороне BC; **(б)** внутри треугольника ABC отметили точку D. Докажите, что справедливо неравенство $AD + DC \leqslant AB + BC$.

3. Внутри треугольника ABC с периметром P отмечена точка X. Докажите, что
(а) $AX + BX + CX > P/2$; **(б)** $AX + BX + CX < P$.

4. Четыре дома расположены в вершинах выпуклого четырехугольника. Где нужно вырыть колодец, чтобы сумма расстояний от него до четырех домов была наименьшей?

5. Даны точки A и B. Найдите геометрическое место точек, расстояние от каждой из которых до точки A больше, чем расстояние до точки B.

6. **(Лемма о ножницах)** В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ известно, что $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, а угол B меньше угла B_1. Докажите, что $AC < A_1C_1$.

7. Рассмотрим квадрат $ABCD$ и произвольную точку O внутри него. Докажите, что тогда выполнено неравенство $OB + OC + OD > OA$.

8. **(а)** Отрезок XY; **(б)** треугольник XYZ лежит внутри треугольника ABC. Докажите, что его длина/периметр меньше наибольшей стороны/периметра треугольника ABC.

9. На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки D и E соответственно так, что $BD = BE$. Докажите, что из отрезков CD, AE и AC можно составить треугольник.

10. Точка D — середина основания AC равнобедренного треугольника ABC. Точка E — основание перпендикуляра, опущенного из точки D на сторону BC. Отрезки AE и BD пересекаются в точке F. Какой из отрезков BF и BE длиннее?

11. Внутри треугольника ABC выбраны точки M и N. Докажите, что сумма расстояний от точки M до вершин треугольника отличается от суммы расстояний от точки N до вершин треугольника не более чем на длину отрезка MN.

12. Верно ли, что в любом выпуклом n-угольнике, $n > 3$, существует вершина и выходящая из неё диагональ такие, что диагональ образует острые углы с обеими сторонами, выходящими из этой вершины?

Симметрия

1. На сторонах угла с вершиной O отметили точки: A_1 и A_2 — на одной стороне, B_1 и B_2 — на другой стороне. Оказалось, что $OA_1 = OB_1$ и $OA_2 = OB_2$. Докажите, что точка пересечения отрезков A_1B_2 и A_2B_1 лежит на биссектрисе угла.

2. Дан квадрат $ABCD$. На продолжении диагонали AC за точку C отмечена такая точка K, что $BK = AC$. Найдите угол BKC.

3. Около прямолинейной железной дороги **(а)** по разную сторону **(б)** по одну сторону от неё расположены две деревни. В какой точке на железной дороге нужно построить станцию так, чтобы сумма расстояний до деревень была минимальной?

4. На стороне AC треугольника ABC выбрали точки P и Q такие, что $BA = AP$ и $CB = CQ$. Пусть I — точка пересечения биссектрис треугольника ABC. Докажите, что треугольник IPQ равнобедренный.

5. Из точек A и B, лежащих на разных сторонах угла, восстановлены перпендикуляры к сторонам, пересекающие биссектрису угла в точках C и D. Докажите, что середина отрезка CD равноудалена от точек A и B.

6. На продолжении стороны AB параллелограмма $ABCD$ за точку A отметили точку E. Оказалось, что $ED = DB = BA$. Докажите, что точка пересечения перпендикуляров из B на AD и из D на AB лежит на прямой EC.

7. Точка C лежит внутри прямого угла AOB. Докажите, что периметр треугольника ABC больше $2OC$.

8. Внутри острого угла XOY взяты точки M и N, причём $\angle XON = \angle YOM$. На луче OX отмечена точка Q так, что $\angle NQO = \angle MQX$, а на луче OY — точка P так, что $\angle NPO = \angle MPY$. Докажите, что длины ломаных MPN и MQN равны.

9. В треугольнике ABC угол B равен $60°$. На лучах AB и CB отложены отрезки AX и CY, равные стороне AC. Докажите, что прямая XY проходит через точку пересечения биссектрис треугольника ABC.

10. В треугольнике ABC равны стороны AB и BC, а угол B равен $20°$. Докажите, что выполнены неравенства **(а)** $AB > 2AC$; **(б)** $AB < 3AC$.

11. Дан выпуклый шестиугольник $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$, все стороны которого равны. Каждую его вершину отразили симметрично относительно прямой, проходящей через две соседние вершины. Полученные точки обозначили через P_1', P_2', P_3', P_4', P_5', P_6' соответственно. Докажите, что $\triangle P_1'P_3'P_5' = \triangle P_4'P_6'P_2'$.

Параллельный перенос

1. Две деревни находятся по разные стороны от широкой прямолинейной реки. Миша может построить мост, перпендикулярный реке. Где именно ему нужно это сделать, чтобы добраться из одной деревни в другую как можно быстрее?

2. Внутри прямоугольника $ABCD$ взята точка M. Докажите, что существует выпуклый четырёхугольник с перпендикулярными диагоналями длин AB и BC, стороны которого равны AM, BM, CM, DM.

3. Доказать, что трапеция является равнобедренной тогда и только тогда, когда

(а) углы при одном из оснований трапеции равны;

(б) диагонали трапеции равны.

4. Отрезки AB и CD длины 1 пересекаются под углом 60°. Докажите, что $AC + BD \geqslant 1$.

5. На медиане AM треугольника ABC отмечена точка X. Точка Y такова, что $XY \parallel AB$ и $CY \parallel AM$. Докажите, что $BX = AY$.

6. В треугольнике ABC на стороне AB выбраны точки K и L так, что $AK = BL$, а на стороне AC — точки M и N так, что $AM = NC$. Докажите, что $KM + NL \geqslant BC$.

7. **(а)** Докажите, что в треугольнике медиана меньше полусуммы заключающих её сторон.

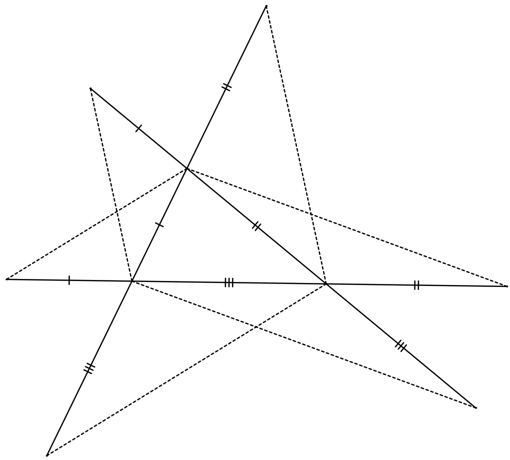
(б) Пусть P, Q — середины сторон AB и CD четырёхугольника $ABCD$. Докажите, что $PQ \leqslant \frac{BC+AD}{2}$, причём равенство достигается тогда и только тогда, когда четырёхугольник $ABCD$ является трапецией.

Параллельный перенос. Добавка

1. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ стороны AB и CD равны. Пусть ℓ — прямая, проходящая через середины BC и AD. Докажите, что ℓ пересекает прямые AB и CD под равными углами.

2. На сторонах AB, BC, CD, DA параллелограмма $ABCD$ выбраны точки P, Q, R и S соответственно. Докажите, что центры описанных окружностей треугольников $\triangle PBQ$, $\triangle QCR$, $\triangle RDS$ и $\triangle SAP$ являются вершинами параллелограмма.

3. Докажите, что в шестиугольнике, образованном пунктирными прямыми, все пары противоположных сторон равны и параллельны.



Перекладывание отрезков

1. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC выполнено $\angle ABD = 90°$ и $AD = BC + CD$. Найдите отношение $AD : BC$.

2. В треугольнике ABC угол B вдвое больше угла C, а угол A — тупой. Точка K на стороне BC такова, что угол KAC — прямой. Докажите, что $KC = 2AB$.

3. Биссектрисы углов треугольника ABC пересекаются в точке I. Известно, что $CA + AI = BC$. Найдите отношение градусных мер углов BAC и CBA.

4. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ выполняются равенства $\angle B = \angle C$ и $CD = 2AB$. На стороне BC выбрана точка X такая, что $\angle BAX = \angle CDA$. Докажите, что $AX = AD$.

5. На гипотенузе AC прямоугольного треугольника ABC выбрана такая точка D, что $BC = CD$. На катете BC взята такая точка E, что $DE = CE$. Докажите равенство $AD + BE = DE$.

6. Дан выпуклый пятиугольник $ABCDE$, причём прямая BE параллельна прямой CD и отрезок BE короче отрезка CD. Внутри пятиугольника выбраны точки F и G таким образом, что $ABCF$ и $AGDE$ — параллелограммы. Докажите, что $CD = BE + FG$.

7. Внутри равностороннего треугольника ABC отмечена произвольная точка M. Докажите, что можно выбрать на стороне AB точку C_1, на стороне BC — точку A_1, а на стороне AC — точку B_1 таким образом, чтобы длины сторон треугольника $A_1B_1C_1$ были равны отрезкам MA, MB и MC.

Теорема Штейнера-Лемуса

Теорема (Я. Штейнер, К. Л. Лемус, 1840).
Треугольник является равнобедренным тогда и только тогда, когда некоторые две его биссектрисы равны.

1. Докажите, что в равнобедренном треугольнике ABC с основанием BC равны биссектрисы, проведённые из вершин B и C.

Оказывается, что прямое утверждение существенно сложнее обратного. Мы рассмотрим несколько геометрических способов его доказательства.

В следующих задачах дан треугольник ABC, в котором равны биссектрисы BP и CQ.

Доказательство 1. Через точки P и Q проведём прямые ℓ_1 и ℓ_2, параллельные стороне BC. Пусть ℓ_1 пересекает сторону AB в точке M, а ℓ_2 пересекает AC в точке N.

2. Докажите, что если отрезки MP и NQ совпали, то треугольник ABC — равнобедренный.

Предположим, что NQ лежит «выше» MP.

3. **(а)** Докажите, что при таком расположении отрезков $MP > NQ$;
(б) Докажите, что треугольники BPM и CQN — равнобедренные;
(в) С помощью предыдущего пункта докажите, что $MP < NQ$.

Доказательство 2. Пусть $\angle ABC = 2\beta$, $\angle ACB = 2\gamma$. Предположим, что $\gamma > \beta$.

4. **(а)** Докажите, что $\angle BQC > \angle BPC$;

Отложим на стороне AB отрезок $AM = AC$. Из предыдущего пункта следует, что на отрезке CM найдётся такая точка F, что $\angle CQF = \angle CPB$.

(б) Докажите, что $\triangle CQF = \triangle BPC$;
(в) Докажите, что, вопреки предыдущему пункту, $CF < BC$.

Доказательство 3. Начнём с предположения, что $\gamma > \beta$, как и в доказательстве 2.

Перенесём точку P параллельно CQ в точку L так, что $CQLP$ — параллелограмм. Тогда треугольник BPL — равнобедренный, поскольку $PL = CQ$ по свойству параллелограмма, а биссектрисы BP и CQ равны по предположению.

5. **(а)** С помощью леммы о ножницах докажите, что $BQ > CP$;
(б) Докажите, что $\angle PLB > \angle PBL$, что противоречит равнобедренности треугольника BPL.

Заключительный разнобой

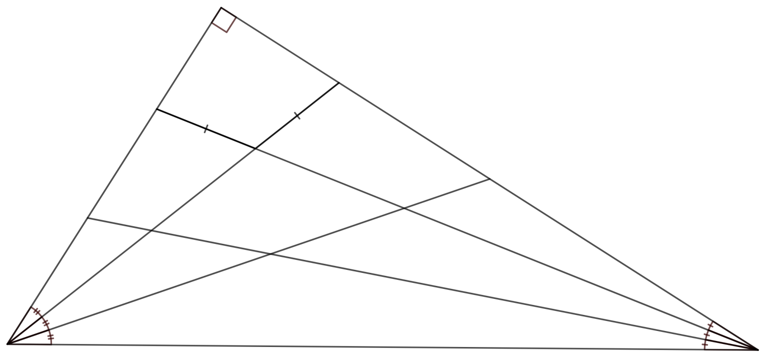
1. В остроугольном треугольнике ABC угол при вершине A равен 45 градусам. Докажите, что периметр этого треугольника меньше удвоенной суммы его высот, опущенных из вершин B и C.

2. На биссектрисе AL треугольника ABC выбрана точка D. Известно, что $\angle BAC = 2\alpha$, $\angle ADC = 3\alpha$, $\angle ACB = 4\alpha$. Докажите, что $BC + CD = AB$.

3. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ выполнено $\angle B = \angle C = 120°$ и $BC + CD = AB$. Докажите, что $AC = AD$.

4. Точка M — середина гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC, в котором угол A равен $15°$. На катете AC отмечена точка K такая,что $KM = BC$ и угол AMK — тупой. Найдите углы треугольника KBC.

5. Докажите, что отмеченные отрезки равны.



Часть III

Комбинаторика

Графы. Деревья

Связный граф называется *деревом*, если в нем нет циклов.

Вершину графа степени 1 назовем *висячей*.

1. **(а)** Докажите, что в любом дереве, содержащем хотя бы 2 вершины, не меньше двух висячих вершин.
(б) В дереве n вершин. Докажите, что в нем ровно $n - 1$ ребро.
(в) Пусть в связном графе n вершин и $n - 1$ ребро. Докажите, что он — дерево.

2. В доску вбито 999 гвоздей. Петя и Вася играют в игру, делая ходы по очереди (начинает Петя). За один ход можно соединить два несоединенных гвоздя ниткой. Тот игрок, после хода которого образуется замкнутая цепь, проигрывает. Кто выиграет при правильной игре?

3. В графе на 101 вершине ребра покрасили в 3 цвета. Оказалось, что после выбрасывания ребер любого цвета остается связный граф. Какое минимальное количество ребер могло быть в изначальное графе ?

4. Докажите, что в любом связном графе можно выкинуть несколько ребер так, чтобы осталось дерево.

Получившийся при выкидывании рёбер граф называется *остовным деревом*.

5. Докажите, что в любом связном графе можно удалить вершину вместе со всеми выходящими из нее рёбрами так, чтобы он остался связным.

6. В связном графе n вершин и $2n-1$ ребро. Докажите, что из него можно выкинуть ребра некоторого цикла так, что граф останется связным.

7. Рёбра дерева изначально окрашены в два цвета. Если в какую-то вершину приходят рёбра только одного цвета, то их все можно перекрасить в другой цвет. Обязательно ли можно все ребра исходного дерева сделать одноцветным?

8. В первый класс поступило n человек, и пока никто ни с кем не дружит. Учитель дал каждому ученику по карточке с натуральным числом. Сумма чисел на всех карточках равна $2n - 2$. Докажите, что ученики могут подружиться так, чтобы число друзей каждого ученика совпадало с числом на его карточке.

Графы. Деревья. Добавка

1. В стране есть несколько городов, соединенных дорогами. Город называется захолустным, если из него выходит только одна дорога, и узловым, если из него выходит не менее трех дорог. Известно, что в этой стране 101 захолустный город. При каком наименьшем количестве узловых городов можно заведомо утверждать, что в стране найдутся несколько городов, связанных циклическим маршрутом?

2. На клетчатой бумаге со стороной клетки, равной 1, нарисован многоугольник площади n. Его контур идет по линиям сетки. Какой наибольший периметр может иметь этот многоугольник?

3. В виртуальном компьютерном государстве не менее двух городов. Некоторые пары городов соединены дорогой. Петя и Вася играют в такую игру. В начале игры Петя указывает на каждой дороге направление, в котором по ней можно двигаться, и помещает в один из городов туриста. Далее за ход Петя перемещает туриста по дороге в разрешённом направлении в соседний город, а Вася в ответ меняет направление одной из дорог, входящей или выходящей из города, куда попал турист. Вася победит, если в какой-то момент Петя не сможет сделать ход. Докажите, что если граф, образованный городами и дорогами, — дерево, то Петя может играть так, чтобы не проиграть, как бы ни играл Вася.

Графы. Индукция

1. Докажите, что вершины любого графа можно покрасить в два цвета так, чтобы разноцветных ребер было не меньше, чем одноцветных.

2. Докажите, что существует граф с $2n$ вершинами, степени которых равны $1, 1, 2, 2, \ldots, n, n$.

3. В компании из n человек ($n > 3$) у каждого появилась новость, известная ему одному. За один телефонный разговор двое сообщают друг другу все известные им новости. Докажите, что за $2n - 4$ разговора все они могут узнать все новости.

4. В стране n городов. Между каждыми двумя из них проложена либо автомобильная, либо железная дорога. Турист хочет объехать страну, побывав в каждом городе ровно один раз, и вернуться в город, с которого он начинал путешествие. Докажите, что турист может выбрать город, с которого он начнет путешествие, и маршрут так, что ему придётся поменять вид транспорта не более одного раза.

5. В графе $2n$ вершин и $n^2 + 1$ ребро. Докажите, что в этом графе есть цикл из трёх вершин.

6. В стране любые два города связаны авиалинией одной из двух авиакомпаний. Докажите, что можно закрыть одну из авиакомпаний так, что по–прежнему от любого города можно будет добраться до любого другого.

7. В одной компании среди любых четырех человек есть знакомый с тремя остальными. Докажите, что есть человек, который знает всех.

8. Докажите, что существует связный граф на $6n$ вершинах, все степени всех вершин которого равны 3, в котором нет полных подграфов на 3 вершинах.

9. В графе 2024 вершины. Докажите, что его рёбра можно покрасить в 1012 цветов так, чтобы не было цикла, в котором все рёбра покрашены в один цвет.

10. В графе n вершин. В каждой из них лежит некоторое количество монет. За один ход разрешается переложить некоторое количество монет из одной вершины в соседнюю. Докажите, что из любого расположения монет можно сделать любое другое не более чем за $n - 1$ ходов.

Графы. Подвешивание.

1. В некотором городе началась эпидемия муравьиного гриппа. Сначала муравьиным гриппом заболел один человек. Когда человек здоров, он посещает за день всех своих больных друзей. Человек, который заболевает муравьиным гриппом, болеет ровно один день и весь день лежит дома, а на следующий день у него появляется иммунитет ровно на один день. Муравьиный грипп очень заразен, поэтому при посещении любого больного человек заболевает, если у него нет иммунитета. Докажите, что эпидемия муравьиного гриппа рано или поздно остановится.

2. В графе степень каждой вершины равна трём, и любые две несоседние вершины имеют общего соседа. Какое максимальное количество вершин может быть в этом графе?

3. В стране 100 городов, некоторые из которых соединены авиалиниями. Известно, что от любого города можно долететь до любого другого (возможно, с пересадками). Докажите, что можно выбрать изначальный город и маршрут, состоящий из не более чем 196 перелётов, проходящий через все города хотя бы по разу.

4. В стране 4000 дорог и **(а)** 1500 городов; **(б)** 2019 городов. Из каждого города выходят хотя бы 3 дороги. Докажите, что есть циклический маршрут, проходящий не более чем через 18 городов.

5. В дереве 100 висячих вершин. Докажите, что можно провести 50 ребер так, чтобы при удалении любого ребра граф оставался связным.

6. Степени всех вершин графа не меньше n, причем нет циклов длины 3, 4 и 5. Докажите, что в нем существует $n^2 - n$ вершин, никакие две из которых не смежны.

Графы. Подвешивание. Добавка.

1. В стране 2000 городов. Некоторые из них соединены между собой дорогами так, что между любыми городами есть единственный путь, причем он проходит не более чем по восьми дорогам. Город называется захолустным, если из него выходит не более восьми дорог. Докажите, что в стране найдется город, соединенный дорогами как минимум с восемью захолустными городами.

2. На предприятии трудятся 50000 человек. Для каждого из них сумма количества его непосредственных начальников и его непосредственных подчиненных равна 7. В понедельник каждый работник предприятия издает приказ и выдает копию этого приказа каждому своему непосредственному подчиненному (если такие есть). Далее, каждый день работник берет все полученные им в предыдущий день приказы и либо раздает их копии всем своим непосредственным подчиненным, либо, если таковых у него нет, выполняет приказы сам. Оказалось, что в пятницу никакие бумаги по учреждению не передаются. Докажите, что на предприятии не менее 97 начальников, над которыми нет начальников.

3. В одной далёкой стране есть несколько (больше 10000) замков, соединённых дорогами, причём между любыми двумя замками существует ровно 1 путь, проходящий по каждой дороге не более 1 раза. Король хочет подарить каждый замок одному из своих баронов так, чтобы выполнились два условия:

(1) между любыми двумя замками, принадлежащими одному барону, есть путь, состоящий из не более чем 1000 дорог;

(2) ни на каком пути (даже самопересекающемся), состоящем из 200 дорог, нет трёх замков, принадлежащих трём разным баронам.

Всегда ли король может это сделать?

Графы. Двудольность

Граф называется *двудольным*, если его вершины можно раскрасить в два цвета так, что любое ребро соединяет вершины разного цвета.

1. **(а)** Докажите, что любое дерево является двудольным графом. **(б)** Докажите, что граф является двудольным если и только если он не содержит циклов нечетной длины.

2. В доску вбито 111 гвоздей. Петя и Вася играют в игру, делая ходы по очереди (начинает Петя). За один ход можно соединить два еще не соединенных между собой гвоздя ниткой. Тот игрок, после хода которого образуется замкнутая цепь из нечетного количества ниток, проигрывает. Кто из игроков может всегда выиграть, как бы ни играл соперник ?

3. В графе со 100 вершинами без треугольников (циклов длины 3) степени всех вершин больше 40. Докажите, что в этом графе нет циклов длины 5.

4. В 7 вершин куба расставили единицы, а в последнюю вершину — 0. Каждым ходом к концам одного из ребер добавляются равные вещественные числа. Можно ли за несколько ходов сделать все числа равными?

5. Дано 100 иррациональных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$. Какое наибольшее количество чисел вида $a_i + a_j$ могут быть рациональными?

6. Выписаны первые 1000 натуральных чисел. Докажите, что их можно покрасить в два цвета так, чтобы отношение чисел одинакового цвета не было простым числом.

7. На клетчатой доске 9×9 отмечено 18 клеток так, что на каждой вертикали и на каждой горизонтали отмечено ровно 2 клетки. Два расположения отмеченных клеток эквивалентны, если, меняя любое число раз вертикали между собой и горизонтали между собой, мы из одного расположения можем получить другое. Сколько существует неэквивалентных расположений отмеченных клеток?

8. В дереве четное число висящих вершин. Петя добавил к дереву цикл, проходящий только через висячие вершины, при том ровно по разу. Докажите, что вершины получившегося графа можно раскрасить в 3 цвета так, что любое ребро соединяет вершины разного цвета.

Графы. Двудольность. Добавка

1. Петя записал в каждой вершине связного графа число. Потом пришёл Вася, записал на каждом ребре сумму чисел в вершинах этого ребра и стёр числа Пети. Для каких графов гарантированно можно восстановить числа, написанные Петей?

2. Кузнечик прыгает по точкам плоскости с целыми координатами на одно и тоже расстояние $\sqrt{r}$. Мог ли он вернуться в изначальную точку через нечётное количество прыжков?

3. Кузнечик умеет прыгать по полоске из n клеток на 8, 9 и 10 клеток в любую сторону. Будем называть натуральное число n пропрыгиваемым, если кузнечик может, начав с некоторой клетки, обойти всю полоску, побывав на каждой клетке ровно один раз. Найдите хотя бы одно $n > 50$, которое не является пропрыгиваемым.

Подсчет двумя способами

1. Можно ли занумеровать рёбра куба натуральными числами от 1 до 12 так, чтобы для каждой вершины куба сумма номеров рёбер, которые в ней сходятся, была одинаковой?

2. Во взводе 10 человек. В каждый из 100 дней какие-то четверо назначались дежурными. Докажите, что какие-то двое были вместе на дежурстве не менее 14 раз.

3. Треугольник разрезали на выпуклые четырёхугольники. Докажите, что хотя бы у одного четырёхугольника есть угол не меньше 120 градусов.

4. Можно ли расставить на шахматной доске 8 попарно не бьющих друг друга ладей так, чтобы ровно 3 ладьи стояли на черных клетках?

5. В шеренгу выстроены 20 детей: 10 мальчиков и 10 девочек. Затем по очереди каждый мальчик сказал, сколько детей стоит слева от него, а каждая девочка сказала, сколько детей стоит справа от нее. Докажите, что сумма чисел, сказанных мальчиками, равна сумме чисел, сказанных девочками.

6. В некоторых клетках прямоугольной таблицы нарисованы звездочки. Известно, что для любой отмеченной клетки количество звездочек в её столбце совпадает с количеством звездочек в её строке. Докажите, что число строк в таблице, в которых есть хотя бы одна звездочка, равно числу столбцов в таблице, в которых есть хотя бы одна звездочка.

7. В графе степень каждой вершина равна 6, и любые 2 вершины имеют ровно 2 общих соседа. **(а)** Сколько вершин в этом графе? **(б)** Приведите пример такого графа.

8. Камни, сложенные в две кучки, собрали и разложили в три кучки. Докажите, что не менее двух камней оказались кучках меньшего размера, чем те, в которых они лежали изначально.