Гробарий

Здесь собраны все задачи, которые на кружке решило 0 человек. Еще не поздно сдать в Хеопсе!

1. **Упорядочивание, №9**

   В некоторой стране города соединены дорогами. Оказалось, не существует пути, проходящего через ℓ различных городов. Докажите, что тогда города можно разбить на ℓ округов так, чтобы любая дорога проходила между городами из разных округов.

2. **Парные стратегии, №7**

   На доске нарисован правильный 108-угольник. Двое по очереди закрашивают его вершины. Проигрывает тот, после чьего хода несколько закрашенных вершин образуют правильный многоугольник. Кто выиграет при правильной игре?

3. **Принцип Дирихле в теории чисел, №6**

   Докажите, что найдется число, представимое в виде суммы четырех квадратов целых чисел более, чем миллионом способов.

4. **Принцип Дирихле в теории чисел, №7**

   Есть ли 2023-значное число, перестановкой цифр которого можно получить 2023 разных 2023-значных полных квадратов?

5. **Чем хороши середины?, №6**

   Пусть BD и CE — высоты остроугольного треугольника ABC. Точки P и Q симметричны середине M стороны BC относительно BD и CE соответственно. Докажите, что прямая PQ делит отрезок DE пополам.

6. **Чем хороши середины?, №7**

   Пусть D, E, F — середины сторон AB, BC, CA треугольника ABC соответственно. Через O_A, O_B, O_C обозначим центры окружностей, описанных около треугольников $\triangle ADF$, $\triangle BED$, $\triangle CFE$ соответственно. Докажите, что прямые O_AE, O_BF и O_CD пересекаются в одной точке.

7. **Чем хороши середины?, №8**

   Дан треугольник ABC. Точка B_1 делит пополам длину ломаной ABC (составленной из отрезков AB и BC), точка C_1 делит пополам длину ломаной ACB, точка A_1 делит пополам длину ломаной CAB. Через точки A_1, B_1 и C_1 проводятся прямые ℓ_A, ℓ_B и ℓ_C, параллельные биссектрисам углов BAC, ABC и ACB соответственно. Докажите, что прямые ℓ_A, ℓ_B и ℓ_C пересекаются в одной точке.

8. **Пересечение биссектрис, №7**

Точка M — середина стороны AB равностороннего треугольника ABC. Точки D и E на сторонах AC и BC соответственно таковы, что $\angle DME = 60°$. Докажите, что $AD + BE = DE + \frac{AB}{2}$.

9. **Пересечение биссектрис, №8**

Точка E на стороне AD квадрата $ABCD$ такова, что $\angle AEB = 60°$. Биссектриса угла ABE, отразившись от стороны AD, пересекает отрезок BE в точке F. Докажите, что точка F лежит на диагонали квадрата.

10. **Пересечение биссектрис, №9**

Пусть P — точка внутри треугольника ABC. Известно, что $\angle BAP = 10°$, $\angle ABP = 20°$, $\angle PCA = 30°$ и $\angle PAC = 40°$. Найдите величину угла $\angle PBC$.

11. **Мудрецы и шляпы, №5**

У каждого из n мудрецов стоит сундук, в котором лежат шляпы одного из a_n цветов. Одновременно каждому мудрецу надевают шляпу из его сундука. Каждый мудрец видит шляпы всех других мудрецов, но не видит своего. Они должны одновременно попытаться угадать цвет своей шляпы, написав его на бумажках. Докажите, что если $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} \geqslant 1$, то мудрецы могут договориться действовать так, чтобы хотя бы один из них угадал.

12. **Эйлеровы графы, №7**

В турнире по бадминтону принимали участие нечётное количество человек. Каждые два участника сыграли по два матча между собой, ничьих не бывает. Оказалось, что все участники турнира выиграли столько же матчей, сколько проиграли. Докажите, что можно отменить результаты половины матчей так, что после этого все участники турнира по-прежнему будут иметь одинаковое число побед и поражений.

13. **Числовые игры, №6**

Дана белая доска 8×8. Играют Миша и Федя. Первым ходом Миша закрашивает n клеток красным цветом. Затем Федя выбирает 4 строки и 4 столбца и красит все клетки в их объединении в чёрный цвет. Миша выигрывает, если на доске осталась хотя бы одна красная клетка. Найдите наименьшее n, при котором Миша сможет выиграть вне зависимости от действий Феди.

14. **Числа Фибоначчи в алгебре, №4в**

(а) Докажите, что любые два соседних числа Фибоначчи взаимно просты.

(б) Докажите, что для любых натуральных m, n выполнено

$$F_{m+n} = F_{m-1}F_n + F_mF_{n+1}.$$

(в) Докажите, что для любых натуральных n и m справедливо равенство

$$\text{НОД}(F_n, F_m) = F_{\text{НОД}(n,m)}.$$

(г) Дано натуральное число n. Пусть m — наименьшее натуральное число, для которого число F_m делится на n. Докажите, что число F_k делится на n тогда и только тогда, когда k делится на m.

15. Числа Фибоначчи в алгебре, №4г

(а) Докажите, что любые два соседних числа Фибоначчи взаимно просты.

(б) Докажите, что для любых натуральных m, n выполнено

$$F_{m+n} = F_{m-1}F_n + F_mF_{n+1}.$$

(в) Докажите, что для любых натуральных n и m справедливо равенство

$$\text{НОД}(F_n, F_m) = F_{\text{НОД}(n,m)}.$$

(г) Дано натуральное число n. Пусть m — наименьшее натуральное число, для которого число F_m делится на n. Докажите, что число F_k делится на n тогда и только тогда, когда k делится на m.

16. Числа Фибоначчи в алгебре, №5

Рассмотрим последовательность остатков от деления чисел Фибоначчи на натуральное число $n > 2$. Докажите, что длина периода этой последовательности чётна.

17. Числа Фибоначчи в комбинаторике, №6б

(а) Есть 6 палочек, каждая не больше одного метра в длину. Известно, что ни из каких трёх из них нельзя составить треугольник. Какой максимальной длины может быть самая короткая палочка?

(б) Есть три одинаковые палочки. Каждую из них разломили на несколько кусков. Докажите, что среди кусков можно найти три, из которых можно сложить треугольник.

18. Правильные треугольники, №7а

(а) Равносторонние треугольники OAB и OCD имеют общую вершину O. Точки M и L — середины сторон AB и CD, точки K и N — середины отрезков AD и BC. Тогда треугольники MNK и KLN — равносторонние.

(б) Точка O внутри выпуклого шестиугольника $ABCDEF$ такова, что треугольники ABO, CDO, EFO — равносторонние. Докажите, что треугольник с вершинами в серединах отрезков BC, DE, AF также является равносторонним.

19. Правильные треугольники, №7б

(а) Равносторонние треугольники OAB и OCD имеют общую вершину O. Точки M и L — середины сторон AB и CD, точки K и N — середины отрезков AD и BC. Тогда треугольники MNK и KLN — равносторонние.

(б) Точка O внутри выпуклого шестиугольника $ABCDEF$ такова, что треугольники ABO, CDO, EFO — равносторонние. Докажите, что треугольник с вершинами в серединах отрезков BC, DE, AF также является равносторонним.

20. Скрытые графы, №5

В каждой клетке таблицы $n \times n$ написано одно из чисел 0, 1 или -1 так, что в каждой строке и в каждом столбце стоит ровно одно число 1 и ровно одно число -1. Разрешается поменять местами любые две строчки или любые два столбца. Докажите, что такими операциями можно добиться того, чтобы все числа в таблице заменились на противоположные.

21. Скрытые графы, №7

Петя поставил на доску 50×50 несколько фишек, в каждую клетку — не больше одной. Докажите, что Вася может поставить на свободные поля этой же доски не более 99 новых фишек (возможно, ни одной) так, чтобы по-прежнему в каждой клетке стояло не больше одной фишки, и в каждой строке и каждом столбце этой доски оказалось чётное количество фишек.

22. Уравнения в целых числах, №7

Найдите все такие натуральные x и простые p, что выполняется

$$x^8 + 2^{2^x+2} = p.$$

23. Слово на букву И, №7

Лена записала в каждой клетке таблицы 2024×2024 ноль или единицу. Вадим хочет закрасить 2012 столбцов так, чтобы в каждой строке нашлась незакрашенная единица, а Артемий хочет закрасить 2012 строк так, чтобы в каждом столбце нашёлся незакрашенный ноль. Докажите, что хотя бы одному из них удастся справиться с задачей.

24. Турниры, №3

В круговом турнире с 2^n участниками не было ничьих. Докажите, что можно выбрать и занумеровать $n+1$ участника так, что каждый, начиная со второго, победил всех участников с меньшими номерами.

25. Турниры, №4

В гоночном турнире 12 этапов и n участников. После каждого этапа все участники в зависимости от занятого места k получают баллы a_k (числа a_k натуральны и $a_1 > a_2 > \dots > a_n$). При каком наименьшем n устроитель турнира может выбрать числа $a_1, \dots, a_n$ так, что после предпоследнего этапа при любом возможном распределении мест хотя бы двое участников имели шансы занять первое место.

26. Турниры, №5

В однокруговом турнире участвовало n команд. Назовём игру *косой*, если в ней встретились команды, которые перед этой игрой участвовали в сумме в нечётном числе игр этого турнира. Для каких n турнир может пройти без косых игр?

27. Турниры, №6

Однажды 2024 теннисиста сыграли полный однокруговой турнир. Назовем тройку игроков A, B, C *правильной*, если A выиграл B и C, B выиграл C. Какое наименьшее количество правильных троек могло быть?

28. Турниры, №7а

Есть 32 волейбольные команды, пронумерованных числами от 1 до 32. В любом волейбольном матче побеждает команда с меньшим номером. **(а)** За какое наименьшее число матчей можно наверняка найти команды 1 и 2? **(б)** Покажите, как за 40 матчей наверняка найти команды с номерами 1, 2 и 3.

29. Турниры, №7б

Есть 32 волейбольные команды, пронумерованных числами от 1 до 32. В любом волейбольном матче побеждает команда с меньшим номером. **(а)** За какое наименьшее число матчей можно наверняка найти команды 1 и 2? **(б)** Покажите, как за 40 матчей наверняка найти команды с номерами 1, 2 и 3.

30. Алгебраические преобразования, №7

По кругу стоят 2^n хамелеонов красного и синего цвета. Каждую минуту все хамелеоны, у которых соседи разного цвета, одновременно перекрашиваются в другой цвет: синие — в красный, красные — в синий. Остальные хамелеоны цвета не меняют. Докажите, что когда-нибудь все хамелеоны одновременно вернут себе первоначальный цвет.

31. Полуинвариант, №6б

Некоторые жители галактической империи знакомы друг с другом. Изначально каждый из них либо джедай, либо ситх. Назовём жителя *хамелеоном*, если большинство его знакомых придерживается иной стороны силы, чем он сам. Каждый эпизод звёздных войн происходит следующее

(а) случайный хамелеон меняет свою сторону силы на противоположную;

(б) **все** хамелеоны **одновременно** меняют свою сторону на противоположную.

Докажите, что рано или поздно (а) процесс стабилизируется; (б) процесс стабилизируется, либо зациклится с периодом 2.

32. Сумма углов многоугольника, №6б

(а) Докажите, что при $n > 4$ любой выпуклый n-угольник можно разрезать на n тупоугольных треугольников.

(б) Докажите, что при любом n существует выпуклый n-угольник, который нельзя разрезать меньше, чем на n тупоугольных треугольников.