

Гробарий первого полугодия

Здесь собраны все неразобранные задачи, которые решило не более 2 человек.

Ждём ваших решений!

- (Упорядочивание 7, 2 человека)** В таблице 10×10 записаны числа от 1 до 100. В каждой строке выбирается третье по величине число. Докажите, что сумма этих чисел не меньше суммы чисел хотя бы одной из строк.
- (Упорядочивание 9, 0 человек)** В некоторой стране города соединены дорогами. Оказалось, не существует пути, проходящего через ℓ различных городов. Докажите, что тогда города можно разбить на ℓ округов так, чтобы любая дорога проходила между городами из разных округов.
- (Дискретная непрерывность 9, 1 человек)** Вадим и Артемий играют в игру. Сначала Артемий загадывает натуральное число и пишет его на доску. За один ход Вадим может вписать несколько плюсов между цифрами числа и записать на доске сумму (например, из числа 123456789 можно получить $1234 + 56 + 789 = 2079$). Вадим побеждает, если ему удастся получить однозначное число за сто ходов. Сможет ли Артемий избежать поражения?

- (Числа сочетаний 11, 2 человека)** Найдите сумму

$$1 \cdot (C_n^1)^2 + 2 \cdot (C_n^2)^2 + \dots + n \cdot (C_n^n)^2.$$

- (Парные стратегии, 7, 0 человек)** На доске нарисован правильный 108-угольник. Двое по очереди закрашивают его вершины. Проигрывает тот, после чьего хода несколько закрашенных вершин образуют правильный многоугольник. Кто выиграет при правильной игре?
- (Разнобой, 8, 1 человек)** Прямоугольник 42×44 разрезан на несколько прямоугольников 1×8 и две связанные фигурки из 4 клеток. Докажите, что эти фигурки равны.
- (Сумма цифр, 5, 1 человек)** Найдите наибольшее возможное значение выражения $\frac{S(n)}{S(16n)}$, если n — произвольное натуральное число.
- (Принцип Дирихле в теории чисел, 4, 1 человек)** Дана строчка из 25 цифр. Всегда ли можно расставить в этой строчке знаки арифметических операций $+$, $-$, \times , $:$ и скобки так, чтобы образовалось числовое выражение, равное 0. Последовательно стоящие цифры можно объединять в числа, но порядок цифр изменять нельзя.
- (Принцип Дирихле в теории чисел, 6, 0 человек)** Докажите, что найдется число, представимое в виде суммы четырех квадратов целых чисел более, чем миллионом способов.

10. **(Принцип Дирихле в теории чисел, 7, 0 человек)** Есть ли 2023-значное число, перестановкой цифр которого можно получить 2023 разных 2023-значных полных квадратов?
11. **(Основная теорема арифметики, 7б, 1 человек)** Натуральные числа x, y таковы, что оба числа $x^3 + y$ и $y^3 + x$ делятся на $x^2 + y^2$. Найдите все такие числа x и y .
12. **(Основная теорема арифметики, 8, 1 человек)** Найдите все натуральные числа x и y , для которых $x^y = y^x$.
13. **(Основная теорема арифметики, 9, 2 человека)** Найдите 2023 различных натуральных числа таких, что сумма никаких нескольких из них не была бы степенью натурального числа.
14. **(Чем хороши середины?, 6, 0 человек)** Пусть BD и CE — высоты остроугольного треугольника ABC . Точки P и Q симметричны середине M стороны BC относительно BD и CE соответственно. Докажите, что прямая PQ делит отрезок DE пополам.
15. **(Чем хороши середины?, 7, 0 человек)** Пусть D, E, F — середины сторон AB, BC, CA треугольника ABC соответственно. Через O_A, O_B, O_C обозначим центры окружностей, описанных около треугольников $\triangle ADF, \triangle BED, \triangle CFE$ соответственно. Докажите, что прямые O_AE, O_BF и O_CD пересекаются в одной точке.
16. **(Чем хороши середины?, 8, 0 человек)** Дан треугольник ABC . Точка B_1 делит пополам длину ломаной ABC (составленной из отрезков AB и BC), точка C_1 делит пополам длину ломаной ACB , точка A_1 делит пополам длину ломаной CAB . Через точки A_1, B_1 и C_1 проводятся прямые ℓ_A, ℓ_B и ℓ_C , параллельные биссектрисам углов BAC, ABC и ACB соответственно. Докажите, что прямые ℓ_A, ℓ_B и ℓ_C пересекаются в одной точке.