

Заключительный разной

1. В группе из нескольких человек некоторые люди знакомы друг с другом, а некоторые — нет. Каждый вечер один из них устраивает ужин для всех своих знакомых и знакомит их друг с другом. После того как каждый человек устроил хотя бы один ужин, оказалось, что какие-то два человека всё ещё не знакомы. Докажите, что на следующем ужине им познакомиться тоже не удастся.
2. Докажите, что каждое положительное рациональное число можно представить в виде частного произведений факториалов простых чисел (не обязательно различных). Например,

$$\frac{10}{9} = \frac{2! \cdot 5!}{3! \cdot 3! \cdot 3!}.$$

3. Стороны параллелограмма равны 3 и 4. Найдите длину диагонали четырёхугольника, образованного пересечениями биссектрис углов параллелограмма.
4. Сумма 2024 положительных вещественных чисел, каждое из которых меньше 1, равна 100. При каком наибольшем натуральном k эти числа можно гарантированно разбить на k групп так, чтобы сумма чисел в каждой группе была больше 1?