Отборочная олимпиада

Задача 1. Существует ли натуральное $k > 2$, что для любого натурального n сумма всех чисел от 1 до kn, которые не делятся на k, будет квадратом натурального числа?

Решение. Заметим, что искомая сумма равна

$$1 + 2 + \ldots + kn - k - 2k - \ldots - kn = \frac{kn(kn+1)}{2} - k\frac{n(n+1)}{2} = \frac{k(k-1)}{2}n^2.$$

Соответственно, для решения задачи достаточно подобрать такое k, чтобы $\frac{k(k-1)}{2}$ являлось квадратом. Такое k существует, например $k = 9$ или $k = 50$. □

Критерии

1 б. Указано подходящее k, но не доказывается почему оно подходит.

3 б. Условие задачи сведено к тому, что $\frac{k(k-1)}{2}$ является квадратом, но утверждается, что такого не бывает.

Задача 2. За круглым столом сидят 40 человек. Может ли случиться, что у каждых двух из них, между которыми сидит чётное число человек, есть за столом общий знакомый, а у каждых двух, между которыми сидит нечётное число человек, общего знакомого нет?

Решение. Рассмотрим двух людей, между которыми сидит чётное число человек (присвоим им номера 1 и 2). По условию у них есть общий знакомый (присвоим ему номер 3).

1) Если 1-й и 2-й знакомы, то все трое попарно знакомы и между любыми двумя из них сидит чётное число человек, а значит общее количество людей за столом нечётно — противоречие.

2) Если 1-й и 2-й не знакомы, то поскольку за столом сидят 40 человек, либо между 1-м и 3-м, либо между 2-м и 3-м сидит чётное число человек. Тогда мы свели задачу к первому случаю и снова можем получить противоречие. □

Критерии

2 б. Люди пронумерованы и показано, что у людей с номерами одной чётности нет общих знакомых.

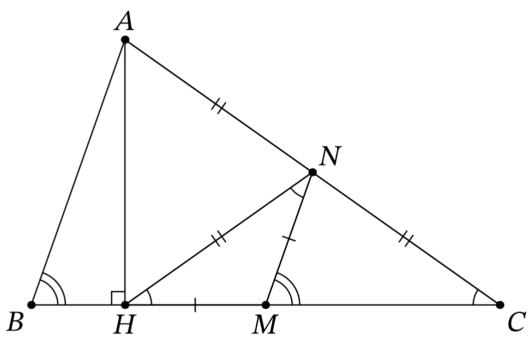
Задача 3. Артемий выписал в ряд несколько натуральных чисел (не обязательно различных). Затем под каждым числом он подписал, сколько раз оно встречается в этом ряду. Получился второй ряд чисел. По нему Артемий таким же образом построил третий ряд, и т. д. Докажите, что на некотором шаге у Артемия получатся два идущих подряд одинаковых ряда.

Решение. Предположим, что чисел сначала было N. Заметим, что после первого шага на доске появятся несколько групп одинаковых чисел от 1 до N (порядок чисел мы не принимаем во внимание), т.е. не более N групп чисел. Каждая группа одинаковых чисел на следующем шаге опять же заменяется на группу одинаковых чисел, равных их количеству.

Предположим, что на каком-то шаге все новые числа в группах получились различные. Это означает, что ни одно число после этого не изменится и условие задачи будет выполнено. Если же в двух или более группах получились одинаковые числа, то количество групп просто уменьшится на 1 или более. Так как групп после первого шага не более N, то не более чем через N шагов мы придём к ситуации с группами попарно различных размеров.

□

Задача 4. В треугольнике ABC точка M — середина стороны BC, а точка H — основание высоты AH. Докажите, что $\angle B = 2\angle C$ тогда и только тогда, когда $AB = 2MH$.



Решение. Отметим середину N стороны AC. Тогда по свойствам средней линии $NM = \frac{AB}{2}$, $\angle NMC = \angle ABC$. По свойству медианы в прямоугольном треугольнике $HN = \frac{AC}{2} = AN = NC$, поэтому треугольник HNC равнобедренный, откуда $\angle NHC = \angle ACB$.

Заметим, что точка M лежит на отрезке CH. Действительно, предположим, что это не так. Тогда если $MH = \frac{AB}{2} = NM$, то $\angle MNH = \angle MHN > \angle MHA = 90°$ — противоречие. Если же $\angle B = 2\angle C$, то в сделанном предположении получаем, что внешний угол $\angle NHC = \angle C$ треугольника MHN больше его внутреннего угла $\angle NMC = \angle B = 2\angle C$ — противоречие.

Теперь равенство $\angle B = 2\angle C$ равносильно тому $\angle NMC = 2\angle NHC$, то есть тому, что треугольник MHN равнобедренный. А это равносильно равенству $MH = NM = \frac{AB}{2}$, что и требовалось доказать. □

Критерии

6 б. Верное решение только в одну сторону.

3 б. Отмечена середина N стороны AC и доказано, что треугольник HMN равнобедренный.

Задача 5. В 100 точках окружности расставлены в некотором порядке числа $1, 2, 3, \ldots, 100$. Разрешается эти 100 точек соединить 50 непересекающимися хордами, для каждой хорды вычислить разность чисел, стоящих в её концах (из большего числа вычитается меньшее), и сложить все полученные разности. Какой наибольший результат можно получить вне зависимости от исходной расстановки чисел?

Решение. Выпишем в строку числа от 1 до 100. После каждой операции будем ставить знак “+” перед большим числом на проведённой хорде и “-” перед меньшим. Понятно, что итоговое выражение, с одной стороны, равно полученному результату, с другой стороны, не превосходит

$$51 + \ldots + 100 - 1 - \ldots - 50 = \frac{100 \cdot 101}{2} - 2 \cdot \frac{50 \cdot 51}{2} = 2500.$$

Теперь покажем, как провести хорды, чтобы получить такой результат.

Индукцией по n докажем следующее утверждение: если на окружности расставлены числа из двух наборов $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ и $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$, то их можно соединить непересекающимися хордами так, что на каждой хорде будут стоять числа из разных наборов.

База: $n = 2$ — очевидна. Докажем переход индукции. Заметим, что на первом шаге найдутся две соседние точки, в первой из которых стоит число a из набора A, а во второй — число b из набора B. Соединим эти точки хордой. Хорды, соединяющие пары оставшихся точек, не пересекают проведённую хорду. Поэтому можно стереть две соединённые точки, вычеркнуть число a из A, а число b из B, и тогда оставшиеся хорды можно провести по предположению индукции.

Применив доказанное утверждение для случая $n = 50$, $A = \{1, 2, \ldots, 50\}$, $B = \{51, \ldots, 100\}$, получим нужный результат. □

Критерии

3 б. Оценка.

4 б. Пример.