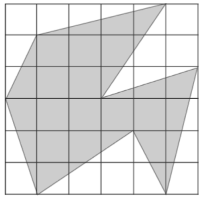
Формула Пика



Формула Пика. Вершины многоугольника без дырок расположены в узлах клетчатой бумаги с клетками размера 1×1. Оказалось, что на границе многоугольника лежит m узлов, а внутри — n узлов. Тогда площадь этого многоугольника равна $n + \frac{m}{2} - 1$.

1. Докажите формулу Пика

   (а) для прямоугольника со сторонами, идущими по линиям сетки;

   (б) для прямоугольного треугольника с катетами, идущими по линиям сетки;

   (в) многоугольника, составленного из двух других многоугольников, для которых формула Пика уже доказана;

   (г) произвольного треугольника;

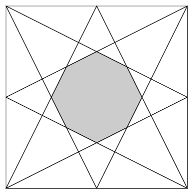
   (д) произвольного выпуклого многоугольника;

   (е) произвольного многоугольника.

2. Можно ли клетчатый квадрат 50×50 разбить на 15 одинаковых многоугольников с вершинами в узлах сетки?

3. Шахматный король обошёл все клетки доски 8×8 и вернулся на начальную клетку. Оказалось, что его путь не имеет самопересечений. Фигуру какой площади он ограничивает?

4. Найдите отношение площади восьмиугольника к площади квадрата. Точки на сторонах являются серединами.



По следующей задаче принимаются только письменные (подробные!) решения.

5. Вершины треугольника лежат в узлах клетчатой бумаги, причём внутри треугольника ровно два узла (возможно, какие-то ещё узлы лежат на его сторонах). Докажите, что прямая, проходящая через эти два узла, либо проходит через одну из вершин треугольника ABC, либо параллельна одной из его сторон.

6. Квадрат $n \times n$ произвольным образом нарисован на клетчатой бумаге. Докажите, что он покрывает не более $(n+1)^2$ узлов решётки.

7. Лена нарисовала клетчатый квадрат 10×10, а Артемий провёл 80 единичных отрезков по линиям сетки так, что квадрат разбился на 20 многоугольников равной площади. Докажите, что все эти многоугольники равны.