

Числовые конструкции

1. Натуральные числа от 1 до 2022 как-то разбили на пары, числа в каждой из пар сложили, а полученные 1011 сумм перемножили. Мог ли результат оказаться квадратом натурального числа?
2. Можно ли в клетки таблицы 3×3 расставить различные числа вида $\frac{1}{n}$ для натурального n так, чтобы суммы чисел во всех столбцах, строках и двух диагоналях были равны?
3. Петя загадал натуральное число d и выписал в ряд 100 различных натуральных чисел таких, что все разности между соседними числами равны d . Могут ли любые два из выписанных чисел быть взаимно простыми?
4. Существует ли такой набор из 100 различных натуральных чисел, что для любых двух чисел из набора их сумма делится на их разность?
5. При каких натуральных $n \geq 2$ найдутся различные натуральные числа a_1, \dots, a_n , такие что сумма $\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_n}{a_1}$ — целое число?
6. (а) Существуют ли 100 натуральных чисел таких, что их сумма равна их наименьшему общему кратному?
(б) А если числа обязательно различны?
7. (а) Существуют ли такие натуральные числа $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{100}$, что

$$\text{НОД}(a_1, a_2) > \text{НОД}(a_2, a_3) > \dots > \text{НОД}(a_{99}, a_{100})?$$

- (б) Существуют ли такие натуральные числа $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{100}$, что

$$\text{НОК}(a_1, a_2) > \text{НОК}(a_2, a_3) > \dots > \text{НОК}(a_{99}, a_{100})?$$