

## Полуинвариант

1. В прямоугольной таблице  $m \times n$  записаны действительные числа. Разрешается менять знак у всех чисел какой-либо строки или какого-либо столбца. Докажите, что такими операциями можно добиться того, чтобы в каждой строке и в каждом столбце сумма была бы неотрицательна.
2. На доске написано много натуральных чисел. За ход можно либо заменить два числа на их сумму, либо разложить число в произведение двух **меньших различных** натуральных чисел и заменить его на эти два числа. Докажите, что рано или поздно на доске останется одно число.
3. В стране несколько городов, попарные расстояния между которыми различны. Путешественник отправился из города  $A$  в самый удалённый от него город  $B$ , оттуда — в самый удалённый от него город  $C$ , и так далее. Докажите, что если  $A$  не совпадает с  $C$ , то путешественник никогда не вернется в город  $A$ .
4. У каждого жителя сказочного королевства есть несколько (может быть 0) монет. Каждый день один из жителей отдает монету своему более богатому другу, если такой житель существует; иначе ничего не происходит. Докажите, что когда-то финансовое положение жителей стабилизируется.
5. Шахматная доска разбита на доминошки. К правой верхней клетке добавлена одна клетка справа (первая строка состоит из 9 клеток, остальные — из 8). Разрешается вынимать любую доминошку и класть ее на две пустые соседние клетки. Докажите, что все доминошки можно расположить горизонтально.
6. Некоторые жители галактической империи знакомы друг с другом. Изначально каждый из них либо джедай, либо ситх. Назовём жителя *хамелеоном*, если большинство его знакомых придерживается иной стороны силы, чем он сам. Каждый эпизод звёздных войн происходит следующее
  - (а) случайный хамелеон меняет свою сторону силы на противоположную;
  - (б) **все** хамелеоны **одновременно** меняют свою сторону на противоположную.Докажите, что рано или поздно (а) процесс стабилизируется; (б) процесс стабилизируется, либо зациклится с периодом 2.