Алгебраические преобразования

1. Про натуральные числа a, b, c и d известно, что

$$2a - 6b - 2c + 3d = 4,\ 3a + 8b - 3c - 4d = 6.$$

Докажите, что d делится на b.

2. Артемий и Вадим загадали по два действительных числа и сообщили их Лене. Оказалось, что сумма чисел, загаданных Артемием, равна произведению чисел, загаданных Вадимом, и наоборот. Лена прибавила ко всем четырём числам по единице и перемножила результаты. Могло ли у Лены получиться отрицательное число?

3. Для некоторых натуральных чисел a, b, c, d выполняются равенства

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{ab+1}{cd+1}.$$

Докажите, что $a = c$ и $b = d$.

4. На каждой из ста карточек записано по одному числу, отличному от нуля, так, что каждое число равно квадрату суммы всех остальных. Какие это числа?

5. Для произвольных натуральных чисел x, y, z положим

$$f(x, y, z) = x^{y^z} - x^{z^y} + y^{z^x} - y^{x^z} + z^{x^y} - z^{y^x}.$$

Вычислите сумму чисел $f(a, b, c)$ по всем возможным различным тройкам натуральных чисел (a, b, c), не превосходящих 2024.

Числа в тройке могут совпадать, а тройки, отличающиеся друг от друга порядком чисел, (например, $(1, 2, 3)$ и $(2, 1, 3)$) считаются различными.

6. Перемножаются все выражения вида $\pm\sqrt{1}\pm\sqrt{2}\pm\ldots\pm\sqrt{99}\pm\sqrt{100}$ (при всевозможных комбинациях знаков). Докажите, что результат является целым числом.

7. По кругу стоят 2^n хамелеонов красного и синего цвета. Каждую минуту все хамелеоны, у которых соседи разного цвета, одновременно перекрашиваются в другой цвет: синие — в красный, красные — в синий. Остальные хамелеоны цвета не меняют. Докажите, что когда-нибудь все хамелеоны одновременно вернут себе первоначальный цвет.