

## Турниры

1. Докажите, что можно устроить полный однокруговой турнир на  $n$  команд в  $n - 1$  тур, если (а)  $n = 2^k$ ; (б)  $n$  — любое чётное число.
2. В турнире участвовали 20 шахматистов. Каждый играл с каждым один раз белыми и один раз чёрными. Обязательно ли найдутся такие два шахматиста, что один из них выиграл не меньше партий белыми и не меньше партий чёрными, чем другой?
3. В круговом турнире с  $2^n$  участниками не было ничьих. Докажите, что можно выбрать и занумеровать  $n + 1$  участника так, что каждый, начиная со второго, победил всех участников с меньшими номерами.
4. В гоночном турнире 12 этапов и  $n$  участников. После каждого этапа все участники в зависимости от занятого места  $k$  получают баллы  $a_k$  (числа  $a_k$  натуральны и  $a_1 > a_2 > \dots > a_n$ ). При каком наименьшем  $n$  устроитель турнира может выбрать числа  $a_1, \dots, a_n$  так, что после предпоследнего этапа при любом возможном распределении мест хотя бы двое участников имели шансы занять первое место.
5. В однокруговом турнире участвовало  $n$  команд. Назовём игру *косой*, если в ней встретились команды, которые перед этой игрой участвовали в сумме в нечётном числе игр этого турнира. Для каких  $n$  турнир может пройти без косых игр?
6. Однажды 2024 теннисиста сыграли полный однокруговой турнир. Назовем тройку игроков  $A, B, C$  *правильной*, если  $A$  выиграл  $B$  и  $C$ ,  $B$  выиграл  $C$ . Какое наименьшее количество правильных троек могло быть?
7. Есть 32 волейбольные команды, пронумерованных числами от 1 до 32. В любом волейбольном матче побеждает команда с меньшим номером. (а) За какое наименьшее число матчей можно наверняка найти команды 1 и 2? (б) Покажите, как за 40 матчей наверняка найти команды с номерами 1, 2 и 3.