

## Слово на букву И

**Определение.** *Триангуляцией* многоугольника  $P$  называется разбиение многоугольника  $P$  на непересекающиеся треугольники с вершинами в вершинах  $P$ .

## 数学归纳法

Если взять два треугольника триангуляции с общей стороной, и сменить диагональ получившегося четырёхугольника на другую, получится новая триангуляция. Такая операция называется *флипом*.

1. Докажите, что в любой триангуляции  $n$ -угольника участвует  $n - 3$  диагонали и  $n - 2$  треугольника.
2. Докажите, что с помощью флипов можно из одной триангуляции выпуклого многоугольника получить любую другую.
3. Для натурального числа  $n$  определим вещественное число  $n?$  ("Эн вопросил") по правилам
  - $1? = 1$ ;
  - $n? = \frac{n}{(n-1)?}$  для  $n > 1$ .

Докажите, что для любого натурального  $n$  число  $n? \cdot n!$  является квадратом натурального числа.

4. Докажите, что количество способов разрезать прямоугольник  $m \times n$  на уголки из 3 клеток чётно.
5. Докажите, что любое натуральное число от 1 до  $n!$  можно представить в виде суммы не более чем  $n$  делителей числа  $n!$ .
6. На бесконечной клетчатой доске эволюционирует «жизнь». Вначале все клетки были белыми, а потом  $n$  из них стали вдруг черными. Каждую минуту клетка красится в тот цвет, которого больше среди трёх клеток: её самой, соседа справа и соседа сверху. Докажите, что
  - (а) рано или поздно все чёрные клетки исчезнут;
  - (б) это случится не более, чем через  $n$  минут.
7. Лена записала в каждой клетке таблицы  $2024 \times 2024$  ноль или единицу. Вадим хочет закрасить 2012 столбцов так, чтобы в каждой строке нашлась незакрашенная единица, а Артемий хочет закрасить 2012 строк так, чтобы в каждом столбце нашёлся незакрашенный ноль. Докажите, что хотя бы одному из них удастся справиться с задачей.