Прыжки по кругу

1. По кругу стоят 99 карточек с числами от 1 до 99 в порядке возрастания по часовой стрелке. За одну операцию разрешается поменять местами две карточки, между которыми ровно 5 других карточек. Можно ли такими операциями упорядочить карточки в порядке возрастания против часовой стрелки?

2. Даны натуральные числа n и k, $n > k$. На окружности отмечены n точек, в одной из которых изначально сидит кузнечик. Кузнечик умеет прыгать против часовой стрелки из одной отмеченной точки в другую, каждый раз перелетая через $k-1$ отмеченную точку.
(а) Докажите, что кузнечик побывает во всех отмеченных точках тогда и только тогда, когда НОД$(n, k) = 1$.
(б) Назовём *орбитой* точки A множество точек, достижимых из A. Докажите, что все отмеченные точки разбиваются на НОД(n, k) попарно непересекающихся одинаковых орбит.

3. Ожерелье, состоящее из 1000 бусинок красного или синего цвета, называется *счастливым*, если в нем нет двух красных бусинок, между которыми ровно 55 бусинок. Какое наибольшее количество красных бусинок может быть в счастливом ожерелье?

4. На столе лежат два равных картонных правильных 101-угольника. Вершины одного из них пронумерованы подряд числами от 0 до 100 в порядке обхода против часовой стрелки.
(а) Докажите, что вершины второго 101-угольника можно так занумеровать числами от 0 до 100, что при любом наложении (без переворота) первого на второй как минимум в одной вершине номера совпадут.
(б) Докажите, что число таких нумераций вершин второго многоугольника не меньше 99. (Нумерации, совмещающиеся поворотом, считаем одинаковыми.)

5. На окружности длины 999 отмечены 999 точек, делящих ее на равные дуги. В каждой отмеченной точке стоит фишка. Назовем *расстоянием* между двумя точками длину меньшей дуги между этими точками. При каком наибольшем n можно переставить фишки так, чтобы в каждой отмеченной точке было по фишке, а расстояние между любыми двумя фишками, изначально удаленными не более, чем на n, увеличилось?

6. Даны натуральные числа n и k, $k < n$. В фирме работают n сотрудников, зарплата каждого из которых выражается натуральным числом рублей. Каждый месяц начальник поднимает зарплату на 1 рубль некоторым k сотрудникам. При каких n и k он сможет сделать все зарплаты равными вне зависимости от начального распределения зарплат?

7. Петя как-то занумеровал вершины правильного n-угольника числами от 1 до n. Вася первым ходом ставит фишку в какую-то из вершин. Каждым последующим ходом он может передвинуть фишку из вершины A в вершину B, если между ними не больше 9 других вершин и число в B больше числа в A. Какое наибольшее количество вершин гарантированно сможет посетить Вася, как бы Петя ни нумеровал вершины, если
(а) $n = 1001$; **(б)** $n = 2024$?