

Разнобой

1. Простое число $p > 2$ и целые числа x и y таковы, что $x^3 + y^3 = x^2y + xy^2 + p^{11}$. Докажите, что $x + y$ делится на p .
2. На отрезке AC отмечена точка B . Треугольники ABX и BCY — равносторонние, причём точки X и Y лежат в одной полуплоскости относительно прямой AC . Докажите, что точка B и середины отрезков AU и CX служат вершинами равностороннего треугольника.
3. Имеется цепочка сосисок длины n . Два кота по очереди перегрызают по одной перемычке между сосисками и съедают образовавшиеся «одиночные» сосиски. Выигрышем кота, в результате съевшего большее количество сосисок, назовём разность количеств сосисок, съеденных им и его соперником. Определите, какой кот сможет съесть больше сосисок, и найдите его наибольший гарантированный выигрыш.
4. Для игры в классики на земле нарисован ряд клеток, в которые вписаны по порядку числа от 1 до 10 (см. рис). Маша прыгнула снаружи в клетку 1, затем попрыгала по остальным клеткам (каждый прыжок — на соседнюю по стороне клетку) и выпрыгнула наружу из клетки 10. Известно, что на клетке 1 Маша была 1 раз, на клетке 2 — 2 раза, ..., на клетке 9 — 9 раз. Сколько раз побывала Маша на клетке 10?

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10

5. Дракон запер в пещере шестерых гномов и сказал: "У меня есть семь колпаков семи цветов радуги. Завтра утром я завяжу вам глаза и надену на каждого по колпаку, а один колпак спрячу. Затем сниму повязки, и вы сможете увидеть колпаки на головах у других, но общаться я вам уже не позволю. После этого каждый втайне от других скажет мне цвет спрятанного колпака. Если угадают хотя бы трое, всех отпущу. Если меньше — съем на обед". Как гномам заранее договориться действовать, чтобы спастись?
6. В межгалактической империи все звёздные системы перенумерованы числами от 1 до 2000000. Между системами ходит общественный космический транспорт. Чтобы добраться от системы с номером a в систему с номером b , нужно заплатить НОД(a, b) кредитов. Может ли Артемий, зная только цены перелётов между системами, восстановить нумерацию?
7. Требуется сделать набор гирек, каждая из которых весит целое число граммов, с помощью которых можно взвесить любой целый вес от 1 до 55 граммов включительно даже в том случае, если некоторые гири потеряны (гирьки кладутся на одну чашку весов, измеряемый вес — на другую).
 - (а) Необходимо подобрать 10 гирек, из которых может быть потеряна любая одна;
 - (б) Необходимо подобрать 12 гирек, из которых могут быть потеряны любые две.