Скрытые графы

1. На плоскости проведено n прямых. Каждая пересекается ровно с 55 другими. Чему может быть равно n?

2. Имеется 20 бусинок десяти цветов, по две бусинки каждого цвета. Их как-то разложили в 10 коробок, по две бусинки в каждую коробку.
(а) Докажите, что можно выбрать по одной бусинке из каждой коробки так, что все выбранные бусинки будут разного цвета.
(б) Докажите, что число способов такого выбора есть ненулевая степень двойки.

3. Плоскость раскрашена в шахматную раскраску. Какое наибольшее количество белых клеток может быть в связной фигуре из 1001 клетки?

4. Даны 10 чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$. Известно, что среди попарных сумм $a_i + a_j$ $(i \neq j)$ как минимум 37 целых. Докажите, что все числа $2a_1, 2a_2, \ldots, 2a_{10}$ — целые.

5. В каждой клетке таблицы $n \times n$ написано одно из чисел 0, 1 или -1 так, что в каждой строке и в каждом столбце стоит ровно одно число 1 и ровно одно число -1. Разрешается поменять местами любые две строчки или любые два столбца. Докажите, что такими операциями можно добиться того, чтобы все числа в таблице заменились на противоположные.

6. Из кубиков $1 \times 1 \times 1$ склеен куб $3 \times 3 \times 3$. Какое наибольшее количество кубиков можно из него выкинуть, чтобы осталась фигура с такими двумя свойствами:

- со стороны каждой грани исходного куба фигура выглядит как квадрат 3×3 (глядя перпендикулярно этой грани, мы не увидим просвета — видны 9 кубиков фигуры);
- переходя в фигуре от кубика к кубику через их общую грань, можно от каждого кубика добраться до любого другого?

7. Петя поставил на доску 50×50 несколько фишек, в каждую клетку — не больше одной. Докажите, что Вася может поставить на свободные поля этой же доски не более 99 новых фишек (возможно, ни одной) так, чтобы по-прежнему в каждой клетке стояло не больше одной фишки, и в каждой строке и каждом столбце этой доски оказалось чётное количество фишек.