

Разнобой

1. На столе лежат карточки, на которых написаны по разу все делители числа 8000, причем на каждой карточке написан один из делителей. Два игрока по очереди берут себе по одной карточке. Проигрывает тот, у кого число на одной из его карточек делится на число на другой из его карточек. Кто выигрывает при правильной игре?
2. Докажите, что наибольшая степень двойки, на которую делится число $n!$, равна $n - S_2(n)$, где $S_2(n)$ — сумма цифр в двоичной записи числа n .
3. Дан параллелограмм $ABCD$. Прямая, параллельная AB , пересекает биссектрисы углов A и C в точках P и Q соответственно. Докажите, что углы ADP и ABQ равны.
4. Докажите, что если для вещественных чисел x, y, z, m, n, p выполняются равенства

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{p} = 1, \quad \frac{m}{x} + \frac{n}{y} + \frac{p}{z} = 0,$$

то выполняется также и равенство $\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2} + \frac{z^2}{p^2} = 1$.

5. Клетки бумажного квадрата 8×8 раскрашены в два цвета. Докажите, что Артемий может вырезать из него по линиям сетки два квадрата 2×2 , не имеющих общих клеток, раскраски которых совпадают. (Раскраски, отличающиеся поворотом, считаются разными.)