

Числа Фибоначчи в комбинаторике

- (а) Лягушка находится в левой клетке полоски $1 \times n$. Она умеет прыгать на одну или на две клетки вправо. Сколькими способами она может допрыгать до последней клетки?

(б) Рассмотрев первый прыжок длины 2, комбинаторно докажите равенство $F_1 + F_2 + \dots + F_n = F_{n+2} - 1$.

(в) Комбинаторно докажите тождество $F_1 + F_3 + \dots + F_{2n-1} = F_{2n}$.

(г) Докажите тождество $F_{n+1} = C_n^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-2}^2 + \dots$

(д) Комбинаторно докажите тождество $F_{m+n} = F_{m-1}F_n + F_mF_{n+1}$.
- Сколькими способами доску 2×10 можно замостить доминошками?
- Сколько существует слов длины n , состоящих только из букв A и B , у которых в записи
 - нет двух букв B подряд?
 - количество букв B не превосходит номера самой первой буквы B ?
- Сколько существует представлений числа n в виде суммы нечётных слагаемых? Например, при $n = 6$ представления таковы: $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$, $3 + 1 + 1 + 1$, $1 + 3 + 1 + 1$, $1 + 1 + 3 + 1$, $1 + 1 + 1 + 3$, $1 + 5$, $3 + 3$, $5 + 1$.
- В турнире по системе «проигравший выбывает» участвовали 55 боксёров. Бои шли последовательно. Известно, что у участников каждого боя число предыдущих побед отличалось не более чем на 1. Какое наибольшее число боёв мог провести победитель турнира?
- (а) Есть 6 палочек, каждая не больше одного метра в длину. Известно, что ни из каких трёх из них нельзя составить треугольник. Какой максимальной длины может быть самая короткая палочка?

(б) Есть три одинаковые палочки. Каждую из них разломали на несколько кусков. Докажите, что среди кусков можно найти три, из которых можно сложить треугольник.
- Алёна загадала число от 1 до 144. Лёша может выбрать любое подмножество множества чисел от 1 до 144 и спросить, принадлежит ли ему загаданное число. За ответ «да» Лёша заплатит 2 рубля, а за ответ «нет» — 1 рубль. Какое наименьшее количество денег потребуется Лёше, чтобы наверняка угадать число?